Всюду p обозначает простое число.

При решении задач можно пользоваться другими задачами (даже если они не решены) 1. Докажите, что многочлен а) $x^5+6x+10$ б) $x^5+5x^{n-1}+3$ неразложим над $\mathbb{Z}$.

2. Докажите с помощью теоремы Виета, что при $k < p-1$

$$0^k + 1^k + 2^k + .. + (p-1)^k = 0$$

в поле $\mathbb{Z}_p$.

3. Пусть $f = \sum_{k=0}^{p-1} a_k x^k$ - многочлен в $\mathbb{Z}_p[x]$. Доказать, что

$$a_{p-1} = -\sum_{k=0}^{p-1} f(k), a_{p-2} = -\sum_{k=0}^{p-1} kf(k), a_{p-3} = -\sum_{k=0}^{p-1} k^2 f(k)$$

и т.д.

4. Многочлен $f \in \mathbb{Z}[x]$ таков, что $f^2(x) - f(x)$ кратно p при любом x и $f(0) = 0, f(1) = 1$. Докажите, что $deg(f) \geq p-1$.

5. а) Докажите, что функция, задаваемая многочленом $f \in \mathbb{Z}[x]$ степени $p-1$ - не биекция.

б) Пусть некоторая биекция в $\mathbb{Z}_p$ задана многочленом степени $p-2$. Доказать, что обратную биекцию тоже можно задать многочленом степени $p-2$.

6. $f \in \mathbb{Z}_{p^2}[x]$ и задаёт нулевое отображение на $\mathbb{Z}_{p^2}$. Докажите, что f представим в виде $p(x^p - x)g + (x^p - x)^2 h$, где $g, h \in \mathbb{Z}_{p^2}[x]$.