Рекуррентные соотношения.

10 марта 2017 г.

1. Найти общее решение следующих линейных однородных рекуррентных соотношений второго порядка:

$$a_{n+2} = 7a_{n+1} - 12a_n; \qquad a_{n+2} = 4a_{n+1} - 13a_n; \qquad a_{n+2} = -4a_{n+1} - 4a_n.$$

2. Решить следующие линейные однородные рекуррентные соотношения второго порядка:

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= 5a_{n+1} - 6a_n, && a_0 = 2, \quad a_1 = 6; \\ a_{n+2} &= -2a_{n+1} - a_n, && a_0 = 2, \quad a_1 = 6; \\ a_{n+2} &= 2\sqrt{2}a_{n+1} - 4a_n, && a_0 = 1, \quad a_1 = 2. \end{aligned}$$

3. Доказать, что любые два последовательно идущих друг за другом числа Фибоначчи F_n и F_{n+1} взаимно простые.

4. Построить общее решение рекуррентного соотношения вида

$$a_{n+5} = 2a_{n+4} + 16a_{n+1} - 32a_n.$$

   Записать общее решение аналогичного линейного обыкновенного дифференциального уравнения пятого порядка.

5. Доказать, что числа Фибоначчи F_n удовлетворяют следующим соотношениям:

$$F_{n+m} = F_{n-1}\,F_m + F_n\,F_{m+1}; \qquad (1)$$

$$F_1 + F_3 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}; \qquad (2)$$

$$F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n\,F_{n+1}. \qquad (3)$$

6. Построить общее решение неоднородного рекуррентного соотношения второго порядка

$$a_{n+2} = 5\,a_{n+1} - 4\,a_n + 3 \cdot 2^n.$$

Какое обыкновенное линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка соответствует этому рекуррентному соотношению? Записать решение такого уравнения.

7. Построить общее решение неоднородного рекуррентного соотношения второго порядка

$$a_{n+2} = 5\,a_{n+1} - 6\,a_n + 6 \cdot 3^n.$$

Какое обыкновенное линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка соответствует этому рекуррентному соотношению? Записать решение такого уравнения.

8. Мы положили тысячу рублей в банк под пять процентов годовых. В начале каждого года мы докладываем пятьсот рублей на счет. Сколько денег будет на счете через n лет?

9. На плоскости нарисованы n окружностей так, что любая пара окружностей пересекается ровно по двум точкам, и никакие три окружности не имеют общей точки пересечения. Определить количество a_n областей, на которые разбивается плоскость такими окружностями.

10. Рассмотрим плоскость (x, y). Предположим, что мы можем ходить по плоскости, делая шаг вверх (U), шаг вправо (R) и шаг влево (L) на единицу длины так, чтобы шаг R никогда не следовал за шагом L и наоборот. Подсчитать количество a_n таких путей после n шагов.