

28 сентября 2017

Количество баллов на зачет: 6.5

1. (0.5 балла) Каким линейным рекуррентным соотношениям удовлетворяют последовательности а)  $a_n = n^2$ ; б)  $a_n = n^3$ ?
2. (1 балл) Построить общее решение неоднородного рекуррентного соотношения второго порядка:

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n + 6 \cdot 3^n.$$

3. (1 балл) В теннисном турнире участвуют  $2n$  игроков. Составить и решить рекуррентное соотношение для количества  $a_n$  различных пар, которые можно сформировать для  $n$  матчей первого круга.
4. (1.5 балла) Рассмотрим плоскость  $(x, y)$ . Предположим, что мы можем ходить по плоскости, делая шаг вверх ( $U$ ), шаг вправо ( $R$ ) и шаг влево ( $L$ ) на единицу длины так, чтобы шаг  $R$  никогда не следовал за шагом  $L$  и наоборот. Подсчитать количество  $a_n$  таких путей после  $n$  шагов.
5. (2 балла) На плоскости нарисованы  $n$  окружностей так, что любая пара окружностей пересекается ровно по двум точкам, и никакие три окружности не имеют общей точки пересечения. Определить количество  $a_n$  областей, на которые разбивается плоскость такими окружностями.
6. (1.5 балла) Пути Моцкина длины  $n$  — это пути из точки  $(0, 0)$  в точку  $(n, 0)$ , состоящие из шагов  $(1, 1)$ ,  $(1, 0)$  и  $(1, -1)$  и не опускающиеся ниже оси абсцисс. Напишите рекуррентную формулу для количества таких путей.
7. (0.5 балла) Мы положили тысячу рублей в банк под пять процентов годовых. В начале каждого года мы докладываем пятьсот рублей на счет. Сколько денег будет на счете через  $n$  лет?
8. (1 балл) Последовательность  $a_n$  задана условием:  $a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$ . Найдите  $a_{100}$ , если  $a_1 = 3$ ,  $a_2 = 7$ .
9. (2 балла) Доказать, что числа Фибоначчи  $F_n$  удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}F_{n+m} &= F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}; \\F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1} &= F_{2n}; \\F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 &= F_nF_{n+1}.\end{aligned}$$

10. (1 балл) Доказать, что любые два последовательно идущих друг за другом числа Фибоначчи  $F_n$  и  $F_{n+1}$  взаимно простые.