ДЗ 5. Спектральные теоремы

Итак, мы попробовали решить в прошлый раз мы дали определение нормального оператора. А именно,

Определение 1. Пусть A оператор на евклидовом или унитарном пространстве V. Оператор A называется нормальным, если $AA^* = A^*A$.

Определение 2. Пусть A оператор на евклидовом или унитарном пространстве V называется кососимметрическим (косоэрмитовым), если $A^* = -A$.

Мы остановились на том, что хотим показать, что инвариантные пространства относительно A инварианты относительно A^*. Какой бы ни был оператор верен

Факт. Если подпространство U инвариантно относительно A, то $U^\perp$ инвариантно относительно A^*.

Таким образом поступать прямо как для самосопряжённых операторов нельзя. Но можно заметить следующее: у A и A^* есть собственный вектор, так как они коммутируют.

Возьмём к нему ортогональное дополнение. Это будет инвариантное подпространство. Поступая так далее получаем ортонормированный базис из собственных векторов A. Итого мы показали

Теорема 1. Пусть A – нормальный оператор в унитарном пространстве V. Тогда существует ортонормированный базис V состоящий из собственных векторов оператора A. Очевидно, что в этом базисе матрица A будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ а матрица } A^* - \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix},$$

где λ_i — собственные числа A.

Следствие 1. Существует многочлен $p \in \mathbb{C}[x]$, что $A^* = p(A)$.

Следствие 2. У A и A^* все инвариантные подпространства общие.

Теперь можно получить характеризацию унитарных, вещественных ортогональных, и кососимметрических операторов.

Теорема 2. Оператор A – унитарный тогда и только тогда, когда его собственные числа по модулю равны 1 и существует ортонормированный базис из собственных векторов.

Теорема 3. Оператор A на унитарном пространстве V кососимметрический тогда и только тогда, когда его собственные числа чисто мнимые (или 0) и существует ортонормированный базис из собственных векторов.

Теорема 4. Оператор A на евклидовом пространстве V ортогональный тогда и только тогда, существует ортонормированный базис в котором матрица A блочно-диагональная, при этом блоки имеют размер 1 или 2 и блоки размера 1 состоят из ± 1, а блоки размера 2 имеют вид

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Задачи

Задача 1. Покажите, что для любого оператора A на унитарном пространстве $\operatorname{Ker} A^*A = \operatorname{Ker} A$.

Задача 2. Докажите, что если $p(\lambda)$ — характеристический многочлен ортогональной матрицы порядка n, то $\lambda^n p(1/\lambda) = \pm p(\lambda)$.

Задача 3. Пусть A самосопряжённый оператор. Покажите, что e^A это положительный самосопряжённый оператор и для любого положительного самосопряжённого оператора B существует оператор A, что $e^A = B$.

Задача 4. Найдите каноническую форму
а) для кососимметрического оператора на евклидовом пространстве ;
б) для нормального оператора на евклидовом пространстве;
посмотрев на вещественную и мнимую часть его собственных векторов над $\mathbb{C}$.

Задача 5. Найдите ортонормированный базис в котором ортогональный оператор на $\mathbb{R}^4$ с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

принимает канонический вид.