

## 1 Подсчет остовных деревьев в графе. Матричная теорема о деревьях

**1.1.** Доказанную в предыдущем семестре формулу Кэли  $t(T_n) = n^{n-2}$  мы можем также интерпретировать как формулу подсчета количества всех остовных деревьев в полном графе  $K_n$ . Основная задача данного параграфа — научиться решать более общую задачу подсчета количества  $t(G)$  всех различных остовных деревьев для произвольного связного графа  $G$ .

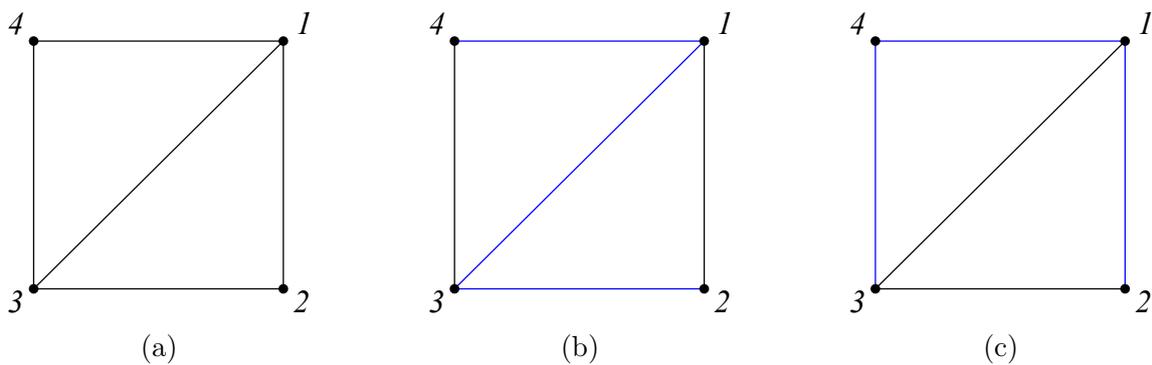


Рис. 1

**1.1.1.** Начнем с примера графа  $G$ , показанного на рис.1,а. У такого графа имеется восемь различных остовных деревьев — четыре из них проходят через диагональ этого графа (см.рис.1,б), а четыре охватывают внешний цикл графа  $G$  (рис.1,с).

В рассмотренном примере мы все множество остовных деревьев разбили на два блока, один из которых содержит деревья, проходящие через выбранное ребро  $e$ , а второй — деревья, через  $e$  не проходящие. Подобного рода рассуждения лежат в основе рекурсивной процедуры подсчета количества  $t(G)$  всех остовных подграфов графа  $G$ , основанной на следующем утверждении.

**Утверждение 1.1.** Пусть  $e$  — ребро, не являющееся петлей графа  $G$ . Тогда

$$t(G) = t(G - e) + t(G \setminus e), \quad (1)$$

где  $G - e$  — граф, полученный из  $G$  удалением ребра  $e$ , а  $G \setminus e$  — граф, полученный из  $G$  стягиванием этого ребра.

**Доказательство.** Все множество остовных деревьев графа  $G$  разбивается на два блока — блок деревьев, содержащих ребро  $e$ , и блок деревьев,  $e$  не содержащих. Очевидно, что все остовные деревья, которые не содержат ребро  $e$ , являются остовными деревьями графа  $G - e$ . Поэтому количество таких деревьев совпадает с количеством  $t(G - e)$ . Давайте теперь докажем, что количество остовных деревьев, содержащих  $e$ , совпадает с количеством остовных деревьев графа  $G \setminus e$ .

Действительно, рассмотрим остовное дерево  $T$  графа  $G$ , содержащее ребро  $e$ . Стягивание этого ребра уменьшает количество ребер и количество вершин в графе  $T \setminus e$  на единицу. Кроме того, эта операция не приводит к потере связности получающегося графа  $G \setminus e$ . Следовательно,

граф  $T \setminus e$  вновь является деревом — остовным деревом графа  $G \setminus e$ . Кроме того, никакие два различных остовных дерева графа  $G$ , содержащих  $e$ , не сольются в одно в результате этой операции. Обратно, любое остовное дерево в графе  $G \setminus e$  превращается в остовное дерево графа  $G$ , содержащее  $e$ , расщеплением вершины на две и добавлением между ними ребра.  $\square$



Рис. 2: Операция стягивания ребра

**1.1.2.** Сделаем несколько замечаний, касающихся вычислительных аспектов расчета  $t(G)$  по формуле (1). Прежде всего, даже если мы стартуем с простого связного графа, то в процессе удаления ребер граф может перестать быть связным, а в процессе стягивания ребер в графе могут появиться петли и мультиребра. Так, например, после стягивания ребра  $e_1$  у графа  $G$ , показанного на рис.2,а, ребро  $e_2$ , связывающее в исходном графе  $G$  те же вершины, что и  $e_1$ , превращается в петлю.

Со случаем несвязных графов справиться просто — у таких подграфов остовных деревьев не существует, поэтому для таких графов  $t(G) = 0$ . Мультиребра в графе не мешают нам пользоваться рекуррентным соотношением (1). Однако при появлении петель нам нужно быть осторожнее — рекуррентное соотношение (1) перестает работать в случае, когда ребро  $e$  представляет собой петлю. Рассмотрим, к примеру, граф, состоящий из одиночной вершины и петли. У такого графа имеется единственное остовное дерево, состоящее из изолированной вершины. Формула же (1) применительно к данному случаю даст нам  $t(G) = 2$ . Как следствие, в процессе подсчета по формуле (1) нам нужно такие петли либо просто игнорировать, либо сразу удалять в процессе их появления — на количество остовных деревьев это никак не повлияет.

Наконец, рекурсивный подсчет по формуле (1) требует задания начальных условий. В процессе удаления и стягивания ребер мы в конце концов получим графы, любое ребро которых представляет собой петлю. Если в полученном графе при этом останется одна вершина, то количество остовных деревьев в таком графе равно единице. В противном случае  $t(G) = 0$ .

**1.1.3.** Полученное нами рекуррентное соотношение (1) приводит к достаточно громоздким вычислениям даже для случая графов, имеющих не очень большое количество  $m$  ребер. С увеличением  $m$  количество вычислений экспоненциально возрастает. К счастью, наряду с (1) для подсчета  $t(G)$  имеется замкнутая аналитическая формула, полученная еще в 1847 году Кирхгофом. Эта формула носит название матричной теоремы о деревьях (Matrix Tree Theorem) и выражает  $t(G)$  через определитель некоторой матрицы. Определитель же квадратной матрицы размером  $n \times n$  мы можем сосчитать, используя менее чем  $n^3$  операций.

Рассмотрим связный граф  $G$  без петель, построенный на множестве вершин  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ . Мы знаем, что матрица  $M_a$  смежности такого графа симметрична, и все диагональные элементы этой матрицы равны нулю. Возьмем теперь матрицу  $M_d$  размером  $n \times n$ , в которой диагональные элементы  $d_{i,i}$  равны степеням  $\deg(i)$  соответствующих вершин в графе  $G$ , а остальные элементы

равны нулю, и вычтем из нее матрицу  $M_a$ . В результате получим матрицу  $L = M_d - M_a$ , которая носит название *матрицы Кирхгофа*.

**Теорема 1.2** (Matrix tree theorem). Пусть  $x_k$  есть произвольная вершина графа  $G$ , а  $L^*$  есть матрица, полученная из матрицы Кирхгофа  $L$  удалением  $k$ -й строки и  $k$ -го столбца, отвечающих вершине  $x_k$ . Тогда количество  $t(G)$  остовных деревьев графа  $G$  равно определителю матрицы  $L^*$ :

$$t(G) = \det(L^*).$$

Прежде чем доказывать эту теорему, посмотрим, как она работает для примера графа  $G$ , показанного на рис.1,а. Для такого графа матрица Кирхгофа имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Удаляя из нее первую строку и первый столбец, мы получаем матрицу

$$L^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

определитель которой равен 8.

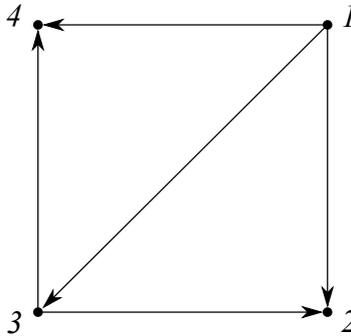


Рис. 3

**1.1.4.** При доказательстве матричной теоремы о деревьях удобно перейти от неориентированного графа  $G$  к некоторому ориентированному графу  $D$ , полученному произвольной ориентацией ребер графа  $G$  (см.рис.3). Оказывается, что при этом имеется достаточно простая связь между матрицей Кирхгофа  $L$  и матрицей  $M_i$  инцидентности орграфа  $D$ . Именно, справедлива следующая

**Лемма 1.3.** Пусть  $D$  есть орграф, полученный из  $G$  произвольной ориентацией ребер графа  $G$ , а  $M_i$  есть матрица инцидентности орграфа  $D$ . Тогда

$$L = M_i \cdot M_i^T.$$

**Доказательство.** Напомним, что в матрице  $M_i$  элемент  $m_{i,j} = 1$ , если ребро  $e_j$  выходит из вершины  $i$ ,  $m_{i,j} = -1$  в случае, если  $e_j$  входит в вершину  $i$ , и  $m_{i,j} = 0$  в остальных случаях. Любой элемент  $l_{i,j}$  матрицы  $M_i \cdot M_i^T$  есть скалярное произведение  $i$ -й и  $j$ -й строк матрицы  $M_i$ .

В случае  $i \neq j$  это скалярное произведение дает нам столько  $-1$ , сколько имеется ребер, соединяющих вершины  $i$  и  $j$ . Действительно, если  $m_{i,k} = 1$  и  $m_{j,k} = -1$ , то это означает, что в графе  $G$  имеется ребро  $e_k$ , соединяющее вершины  $i$  и  $j$ . В противном случае хотя бы один из этих сомножителей равен нулю, поэтому слагаемое  $m_{i,k} \cdot m_{j,k} = 0$  и в скалярное произведение вклада не дает.

В случае  $i = j$  мы имеем  $m_{i,k}^2$ , что дает единицу в случае, если ребро  $e_k$  инцидентно вершине  $i$ . Суммируя по всем  $k$ , мы получаем на диагонали число  $l_{i,i}$ , равное степени вершины  $i$ .  $\square$

**Следствие 1.4.** Матрица  $L^*$ , полученная из матрицы Кирхгофа  $L$  удалением  $k$ -й строки и  $k$ -го столбца, равна

$$L^* = \mathbf{M}_i^* \cdot (\mathbf{M}_i^*)^T,$$

где  $\mathbf{M}_i^*$  есть матрица, полученная из  $\mathbf{M}_i$  удалением  $k$ -й строки.

Для ориентированного графа  $D$ , показанного на рис.3, матрица  $\mathbf{M}_i$  имеет вид

$$\mathbf{M}_i = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

а матрица  $\mathbf{M}_i^*$ , полученная в результате удаления первой строки, равна

$$\mathbf{M}_i^* = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**1.1.5.** Приступим теперь к доказательству матричной теоремы о деревьях. Пусть  $B$  есть квадратная подматрица  $(n-1) \times (n-1)$  матрицы  $\mathbf{M}_i^*$ . Пусть также  $G$  есть неориентированный граф, полученный из  $D$  заменой любого ориентированного ребра на неориентированное (underlying graph). Столбцы подматрицы  $B$  отвечают какому-то набору из  $n-1$  ориентированных ребер в орграфе  $D$ . Соответствующие этому набору неориентированные ребра вместе с инцидентными им вершинами образуют в underlying graph  $G$  некоторый подграф  $H$ . Так, столбцы подматрицы

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

полученной из матрицы  $\mathbf{M}_i^*$  орграфа, показанного на рис.3, удалением последних двух столбцов, индуцируют в графе  $G$  на рис.1,а подграф

$$H = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}\}.$$

Покажем, что определитель подматрицы  $B$  равен  $\pm 1$  в случае, если отвечающий этой подматрице подграф  $H$  образует остовное дерево графа  $G$ , и нулю в противном случае.

Предположим вначале, что подграф  $H$  представляет собой остовное дерево. В этом случае в  $H$  обязательно найдутся хотя бы два листа. Так как в подматрице  $B$  отсутствует только лишь одна строка исходной матрицы  $\mathbf{M}_i$  инцидентности орграфа  $D$ , то в ней обязательно найдется хотя бы одна строка  $j$ , отвечающая вершине  $x$  подграфа  $H$  степени 1. В этой строке имеется

единственный ненулевой элемент  $m_{j,k} = \pm 1$ . Раскладывая определитель матрицы  $B$  по  $j$ -й строке, мы получаем равенство вида

$$\det B = m_{j,k} \cdot \det B' = \pm 1 \cdot \det B',$$

где  $B'$  — подматрица, полученная из  $B$  вычеркиванием  $j$ -й строки и  $k$ -го столбца. На языке подграфа  $H$  данная операция отвечает удалению вершины  $x$  степени 1 вместе с инцидентным ей ребром. В результате мы получаем подграф  $H - x$ , который вновь является остовным деревом, но уже графа  $G - x$ . Продолжая описанный процесс далее, мы на последнем шаге придем к остовному дереву, построенному на двух вершинах, для которого  $\det B = \pm 1$ .

Так, в рассматриваемом примере все три вершины 2, 3, 4 подграфа  $H$ , построенного на ребрах  $\{1, 2\}$ ,  $\{1, 3\}$ ,  $\{1, 4\}$ , являются листьями. Выбирая в качестве  $x$  вершину 2, мы получаем из  $B$  матрицу

$$B' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

отвечающую подграфу  $H - \{2\}$ , индуцированному ребрами  $\{1, 3\}$  и  $\{1, 4\}$ . Удаляя в подграфе  $H - \{2\}$  вершину 3, мы получаем матрицу

$$B'' = (-1),$$

отвечающую дереву  $\{1, 4\}$ . Определитель данной матрицы равен  $-1$ , а следовательно,  $-1$  равен и определитель исходной матрицы  $B$ .

Теперь допустим, что соответствующий подматрице  $B$  подграф  $H$  не является остовным деревом. Следовательно, в таком подграфе обязательно найдется цикл  $C$ . Например, если для орграфа  $D$ , показанного на рис.3, выбрать в матрице  $\mathbf{M}_i^*$  первый, второй и четвертый столбцы, то мы получим матрицу

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

отвечающую подграфу  $H$ , индуцированному ребрами  $\{1, 2\}$ ,  $\{1, 3\}$ ,  $\{2, 3\}$ . В данном случае сам подграф  $H$  представляет собой цикл в графе  $G$  на рис.1,а.

Покажем, что в таком случае обязательно найдется нетривиальная линейная комбинация столбцов, равная нулю. Отсюда будет следовать, что строки матрицы линейно зависимы, то есть что  $\det B = 0$ . Рассмотрим вначале ребра, не входящие в цикл  $C$ . Соответствующие им столбцы матрицы  $B$  включим в линейную комбинацию с коэффициентами, равными нулю. Предположим теперь, что направление всех ребер, входящих в цикл, совпадает с каким-то из направлений обхода цикла  $C$ . В этом случае линейная комбинация соответствующих этим ребрам столбцов равнялась бы нулю (сколько ребер вошло в вершину  $x$  цикла, столько же ребер из нее вышло). Так, если бы у нас вместо ребра  $(1, 2)$  в ориентированном подграфе, отвечающем  $H$ , было бы ребро  $(2, 1)$ , то вместо подматрицы  $B$  мы бы имели подматрицу

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

линейная комбинация столбцов которой в точности равнялась бы нулю. Однако в цикле  $C$  могут найтись и ребра, которые направлены в сторону, противоположную выбранному направлению

обхода цикла  $C$  (ребро  $(1, 2)$  в орграфе  $D$  на рис.3). Тогда мы можем включить отвечающие этим ребрам столбцы (первый столбец подматрицы  $B$ ) в линейную комбинацию с коэффициентами, равными  $-1$ , и вновь получим линейную комбинацию столбцов, равную нулевому столбцу.

Для завершения доказательства теоремы нам теперь достаточно воспользоваться формулой Бине-Коши, позволяющей вычислять определитель квадратной матрицы, являющейся произведением двух прямоугольных матриц. Согласно этой формуле,

$$\det(\mathbf{M}_i^* \cdot (\mathbf{M}_i^*)^T) = \sum (\det B) \cdot (\det B^T) = \sum (\det B)^2,$$

где суммирование проводится по всем  $(n - 1) \times (n - 1)$ -подматрицам  $B$  матрицы  $\mathbf{M}_i^*$ . Мы только что показали, что  $(\det B)^2 = 1$  в случае, если  $B$  отвечает остовному поддереву графа  $G$ , и  $(\det B)^2 = 0$  в противном случае. Тем самым матричная теорема о деревьях доказана.  $\square$

**1.2.** Выше мы свели задачу подсчета остовных деревьев в графе к задаче вычисления определителя матрицы  $L^*$ , полученной из матрицы  $L(G)$  Кирхгофа вычеркиванием произвольного столбца и произвольной строки. Покажем, что эту задачу можно достаточно просто решить, зная собственные значения матрицы  $L(G)$  Кирхгофа.

**1.2.1.** Напомним, прежде всего, некоторые определения, касающиеся собственных чисел матрицы  $A$ . По определению, *собственным вектором*  $\mathbf{x}$  матрицы  $A$  называется ненулевой вектор, удовлетворяющий уравнению

$$A \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x}. \tag{2}$$

Соответствующее этому  $\mathbf{x}$  число  $\lambda$  называется *собственным числом* матрицы  $A$ . Уравнение (2) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда определитель  $\det(\lambda E - A)$  равен нулю. Следовательно, собственные числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , где  $n$  — порядок матрицы  $A$ , можно определить из уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0 \iff \det(\lambda E - A) = 0,$$

где  $E$  — единичная матрица. Левая часть этого уравнения представляет собой многочлен  $\varphi(\lambda)$  степени  $n$ , называемый *характеристическим многочленом* матрицы  $A$ . Так как любой многочлен степени  $n$  раскладывается над полем  $\mathbb{C}$  на произведение линейных сомножителей, то

$$\varphi(\lambda) = (-1)^n \det(A - \lambda E) = \det(\lambda E - A) = (\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_n). \tag{3}$$

При этом собственные числа матрицы  $A$  есть в точности корни (возможно, кратные) этого характеристического многочлена. Кратность корня  $\lambda_i$  характеристического многочлена  $\varphi(\lambda)$  называется *алгебраической кратностью*  $\alpha(\lambda_i)$  собственного числа  $\lambda_i$ .

**1.2.2.** Как мы уже отмечали выше, в случае неориентированных графов матрица  $L$  симметрична, а потому все ее собственные числа вещественны. Кроме того, сумма всех строк матрицы  $L$  Кирхгофа дает нам нулевую строку — в любом столбце  $i$  количество  $-1$  в точности равно степени вершины  $i$ , стоящей на диагонали матрицы  $L$ . Как следствие, строки матрицы  $L$  линейно зависимы, и потому одно из собственных чисел  $L$  (мы его будем обозначать через  $\lambda_1$ ) обязано равняться нулю. Можно показать, что в случае связного графа  $G$  остальные собственные числа  $\lambda_i$ ,  $i = 2, \dots, n$ , этой матрицы отличны от нуля. Используя этот факт, покажем справедливость следующего утверждения.

**Утверждение 1.5.** Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  есть собственные значения матрицы  $L(G)$ , причем  $\lambda_1 = 0$ . Тогда количество остовных деревьев в графе  $G$  рассчитывается по формуле

$$t(G) = \frac{1}{n} \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_n.$$

**1.2.3.** В случае  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_i > 0$ ,  $i = 2, \dots, n$ , характеристическое уравнение (3) для матрицы  $L$  можно переписать в виде

$$\det(\lambda \cdot E - L) = 0 \iff \lambda \cdot (\lambda - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_n) = 0.$$

Найдем коэффициент этого полинома при  $\lambda^1$ . С одной стороны, такой коэффициент равен

$$(-1)^{n-1} \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n.$$

С другой стороны, его можно вычислить по формуле

$$\frac{d}{d\lambda} \det(\lambda \cdot E - L)|_{\lambda=0}.$$

Попытаемся воспользоваться этой формулой и выразить коэффициент при  $\lambda^1$  через количество остовных деревьев графа  $G$ . Для этого напомним, как вычисляется производная определителя  $\det(A(t))$  матрицы  $A(t)$ , зависящей от произвольного параметра  $t$ .

**1.2.4.** Представим матрицу  $A(t)$  в виде строки

$$A(t) = (a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t)),$$

элементами которой являются столбцы  $a_i(t)$  этой матрицы. Пользуясь мультилинейностью определителя, мы можем записать следующее выражение для производной  $d/dt(\det(A(t)))$ :

$$\frac{d}{dt} \det(A(t)) = \det(a'_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t)) + \det(a_1(t), a'_2(t), \dots, a_n(t)) + \dots + \det(a_1(t), a_2(t), \dots, a'_n(t)).$$

Действительно, определитель матрицы  $A$  представляет собой сумму  $n!$  слагаемых, каждое из которых с точностью до сомножителя  $\pm 1$  есть произведение вида  $a_{\sigma(1),1} \cdot a_{\sigma(2),2} \cdot \dots \cdot a_{\sigma(n),n}$ , где  $\sigma$  есть некоторая перестановка  $\sigma$  множества  $[n]$ :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1),1} \cdot a_{\sigma(2),2} \cdot \dots \cdot a_{\sigma(n),n}.$$

В каждое из произведений  $a_{\sigma(1),1} \cdot a_{\sigma(2),2} \cdot \dots \cdot a_{\sigma(n),n}$  обязательно входит ровно по одному элементу от каждого столбца матрицы  $A$ . После дифференцирования каждого такого произведения по  $t$  мы получим в точности  $n$  слагаемых, причем  $j$ -е слагаемое будет иметь вид

$$a_{\sigma(1),1} \cdot a_{\sigma(2),2} \cdot \dots \cdot a'_{\sigma(j),j} \cdot \dots \cdot a_{\sigma(n),n}.$$

При фиксированном  $j$  мы имеем ровно  $n!$  слагаемых описанного вида. Каждая такая группа слагаемых представляет собой определитель матрицы  $A'_j(t) := (a_1, \dots, a'_j, \dots, a_n)$ , полученной из матрицы  $A(t)$  заменой элементов  $j$ -го столбца на производные этих элементов по  $t$ .

Для подсчета определителя  $\det(a_1(t), \dots, a'_j(t), \dots, a_n(t))$  воспользуемся теоремой Лапласа, позволяющей разложить определитель по одному из его столбцов:

$$\det(a_1(t), \dots, a'_j(t), \dots, a_n(t)) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a'_{i,j}(t) \cdot M_{i,j}(t).$$

Здесь  $M_{i,j}(t)$  есть *минор* матрицы  $A'_j(t)$ , то есть определитель матрицы, полученной из  $A'_j(t)$  вычеркиванием  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца. Как следствие,

$$\frac{d}{dt} \det(A(t)) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a'_{i,j}(t) \cdot M_{i,j}(t) = \text{tr}(C^T \cdot A'(t)), \quad (4)$$

где  $C = \{C_{i,j}\}$  — матрица, составленная из элементов вида  $(-1)^{i+j}M_{i,j}$  (так называемых *алгебраических дополнений* или *кофакторов* элементов  $a_{i,j}$ ),  $A'(t)$  — матрица, составленная из элементов  $a'_{i,j}$ ,  $\text{tr}(A)$  — след матрицы  $A$ . Действительно, диагональный элемент  $b_{j,j}$  матрицы  $B = C^T \cdot A'(t)$  равен

$$b_{j,j} = \sum_{i=1}^n c_{j,i} \cdot a'_{i,j}(t).$$

Суммируя по всем таким  $j$ , мы получаем след матрицы  $B$ .

Матрицу  $C^T$  иногда называют *союзной или присоединенной* к  $A$  матрицей. Формулу (4) называют *формулой Якоби* вычисления производной определителя матрицы  $A(t)$ .

**1.2.5.** В рассматриваемом нами случае матрица

$$A(t) = t \cdot E - L \quad \Longrightarrow \quad a'_{i,j}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j; \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad A'(t) = E.$$

Как следствие,

$$\frac{d}{d\lambda} \det(\lambda \cdot E - L) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+i} M_{i,i}(\lambda) = \sum_{i=1}^n M_{i,i}(\lambda),$$

где  $M_{i,i}$  есть минор  $i$ -го диагонального элемента матрицы  $\lambda \cdot E - L$ , то есть определитель размера  $(n-1) \times (n-1)$  матрицы  $\lambda \cdot E - L$ , из которого вычеркнуты  $i$ -я строка и  $i$ -й столбец. Подставляя в него значение  $\lambda = 0$ , мы получим определитель

$$\det(-L^*) = (-1)^{n-1} \det(L_i^*),$$

где  $L_i^*$  — матрица, полученная из матрицы Кирхгофа вычеркиванием  $i$ -го столбца и  $i$ -й строки. Следовательно,

$$\frac{d}{d\lambda} \det(\lambda \cdot E - L)|_{\lambda=0} = (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^n \det(L_i^*).$$

Но из матричной теоремы о деревьях следует, что для графа  $G$  определитель  $\det(L_i^*)$  не зависит от  $i$  и равен  $t(G)$  — количеству остовных деревьев графа  $G$ . Поэтому

$$(-1)^{n-1} \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n = (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^n \det(L_i^*) = (-1)^{n-1} \cdot n \cdot t(G) \quad \Longrightarrow \quad t(G) = \frac{1}{n} \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n.$$

**1.3.** Матричную теорему о деревьях можно обобщить на случай орграфов. Такое обобщение было получено в 1948 году Уильямом Таттом. С помощью этого обобщения мы затем сможем подсчитать количество всех эйлеровых циклов в связном графе  $G$ .

**1.3.1.** Рассмотрим произвольный ориентированный граф  $D$ , построенный на  $n$  вершинах (см. рис.4). Для неориентированного графа  $G$  мы ввели матрицу Кирхгофа  $L$  как матрицу, полученную вычитанием матрицы  $M_a$  смежности графа  $G$  из диагональной матрицы  $M_d$  с элементами  $M_d[i, i] = \text{deg}(x_i)$ . Для ориентированного графа мы можем ввести аналоги матрицы Кирхгофа — матрицы  $L^-$  и  $L^+$ , полученные вычитанием матрицы  $M_a$  смежности орграфа  $D$  из диагональных матриц  $M_d^-$  и  $M_d^+$  с элементами  $M_d^-[i, i] = \text{outdeg}(x_i)$  и  $M_d^+[i, i] = \text{indeg}(x_i)$  соответственно:

$$L^- = M_d^- - M_a, \quad L^+ = M_d^+ - M_a.$$

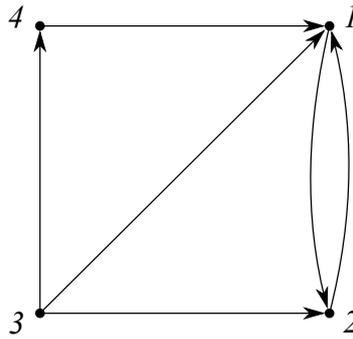


Рис. 4

В качестве примера рассмотрим орграф  $D$ , изображенный на рис.4. Матрицы Кирхгофа для этого орграфа записываются так:

$$L^- = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L^+ = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим сразу же, что, как и в неориентированном случае, матрицы  $L^-$  и  $L^+$  — это матрицы неполного ранга. Действительно, количество исходящих из вершины  $x_i$  ребер равно  $\text{outdeg}(x_i)$ , так что сумма элементов любой строки матрицы  $L^-$  равна нулю. Аналогично,  $-\sum_j M_a[i, j]$  есть взятое со знаком минус количество ребер, входящих в вершину  $j$ . Складывая это с  $\text{indeg}(x_j)$ , мы получаем, что сумма элементов любого столбца матрицы  $L^+$  равна нулю. Следовательно, столбцы матрицы  $L^-$  и строки матрицы  $L^+$  являются линейно зависимыми.

**1.3.2.** Для того, чтобы сформулировать теорему Татта, введем понятие корневых остовных деревьев, все ребра которых ориентированы либо к корню  $x$  (так называемых *spanning arborescences converging to  $x$* ), либо от корня  $x$  (так называемых *spanning arborescences diverging from  $x$* ). В деревьях первого типа исходящая степень любой вершины, отличной от  $x$ , равна единице, а в деревьях второго типа равна единице входящая степень любой вершины, отличной от  $x$ . При этом исходящая степень вершины  $x$  и входящая степень вершины  $x$  равны нулю в деревьях первого и второго типа соответственно.

**1.3.3.** Теорема Татта позволяет подсчитать количество корневых остовных деревьев с корнем в вершине  $i$ .

**Теорема 1.6** (W.Tutte, 1948). *Количество  $t^-(D, i)$  корневых остовных деревьев, все ребра которых ориентированы к корню  $i$ , равно определителю подматрицы матрицы Кирхгофа  $L^-$ , из которой выкинуты  $i$ -я строка и  $i$ -й столбец:*

$$t^-(D, i) = \det(L_{i,i}^-).$$

Так, для показанного на рис.4 графа  $D$  количество  $t^-(D, 1)$  остовных деревьев, все ребра которых ориентированы к вершине 1, равно

$$t^-(D, 1) = \det(L_{1,1}^-) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

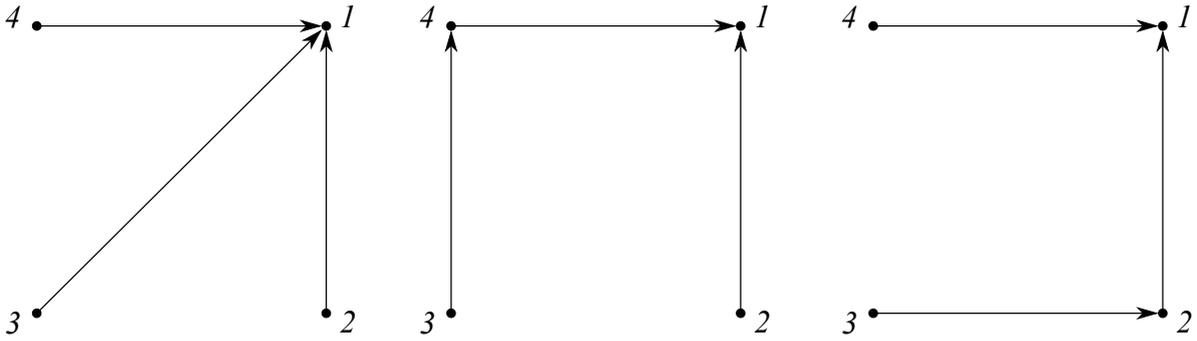


Рис. 5

Все эти деревья изображены на рисунке 5.

**1.3.4.** Приступим к доказательству теоремы Татта. Для определенности будем считать, что в качестве корня мы выбрали вершину 1. Сразу заметим, что в случае, когда в орграфе  $D$  существует вершина с номером  $i > 1$ , у которой  $\text{outdeg}(i) = 0$ , количество остовных деревьев, все ребра которых ориентированы к вершине 1, равно нулю. Тот же результат дает нам и теорема Татта: в таком случае как в матрице  $L_{1,1}^-$ , так и в исходной матрице  $L^-$  строка, отвечающая вершине  $i$ , нулевая. Действительно, в этом случае диагональный элемент этих матриц равен  $\text{outdeg}(i) = 0$ . Кроме того, любой другой элемент  $i$ -й строки есть взятое со знаком минус количество ребер, исходящих из вершины  $i$  в соответствующую этому элементу вершину  $j$ , то есть также равен нулю. Следовательно, и определитель  $|L_{1,1}^-|$  соответствующей матрицы равен нулю.

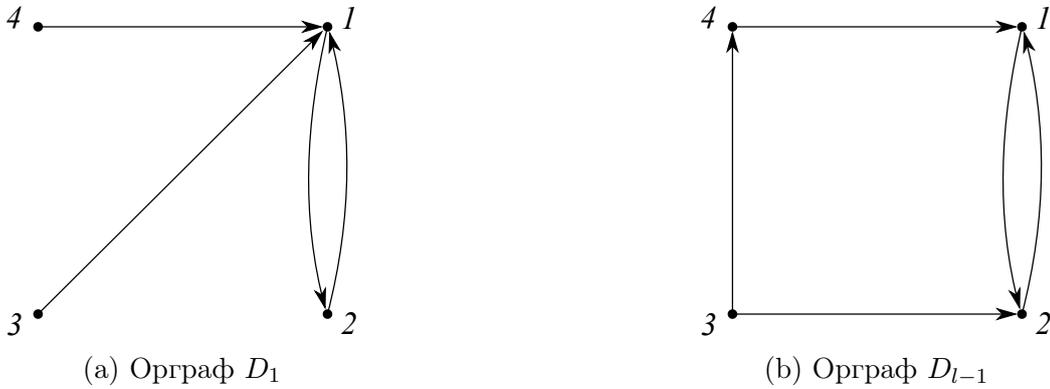


Рис. 6

Теперь рассмотрим случай, когда для некоторого  $i > 1$  из вершины  $i$  исходит  $l > 1$  ребер (см. вершину 3 на рис. 4). С точки зрения матрицы  $L_{1,1}^-$  это означает, что ее  $i$ -й диагональный элемент  $\text{outdeg}(i) = l > 1$ . В этом случае мы вместо орграфа  $D$  можем рассмотреть орграфы  $D_1$  и  $D_{l-1}$ , идентичные  $D$ , за исключением ребер из вершины  $i$  в остальные вершины. Именно, в орграфе  $D_1$  мы оставим лишь одно исходящее из  $i$  ребро (не важно, куда именно), а все остальные ребра из  $i$  оставим в орграфе  $D_{l-1}$ . Так, на рис.6 изображены орграфы  $D_1$  (рис.6,а) и  $D_2$  (рис.6,б), первый из которых отвечает ребру  $e_i = (3, 1)$  орграфа  $D$  из рис.4, а второй — орграфу  $D$ , в котором удалено единственное ребро  $e_i = (3, 1)$ . Тогда

$$t^-(D, 1) = t^-(D_1, 1) + t^-(D_{l-1}, 1).$$

Действительно, мы все остовные деревья разбили на два блока — деревья, проходящие через

$e_i$ , и деревья, через  $e_i$  не проходящие. При этом число  $t^-(D_1, 1)$  описывает количество деревьев в первом блоке, а число  $t^-(D_1, 1)$  — количество деревьев во втором из них.

Заметим, что те же рассуждения мы можем провести и на языке матриц  $L_{1,1}^-$ . Именно, рассмотрим вместо матрицы  $L^-$  матрицы  $L^-(D_1)$  и  $L^-(D_{l-1})$ , описывающие орграфы  $D_1$  и  $D_{l-1}$  соответственно. Удаляя в каждой из них первую строку и первый столбец, получим матрицы  $L_{1,1}^-(D_1)$  и  $L_{1,1}^-(D_{l-1})$ . Так, для орграфов, изображенных на рис.6, имеем

$$L_{1,1}^-(D_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_{1,1}^-(D_{l-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В силу свойства полилинейности определителя мы можем записать, что

$$\det(L_{i,i}^-(D)) = \det(L_{i,i}^-(D_1)) + \det(L_{i,i}^-(D_{l-1})).$$

Следовательно, нам достаточно доказать утверждение теоремы для случая, когда все диагональные элементы матрицы  $L_{1,1}^-$  равны единице, то есть для случая, когда из любой вершины  $i > 1$  исходит единственное ребро.

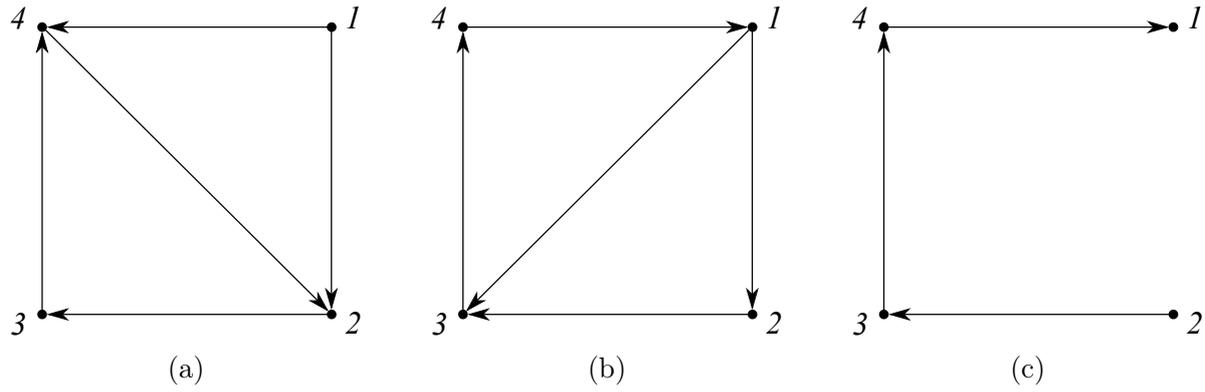


Рис. 7

**1.3.5.** В условиях сделанного выше предположения рассмотрим вначале ситуацию, при которой в орграфе  $D$  найдется ориентированный цикл, не проходящий через вершину 1 (цикл (2, 3, 4) на рис.7,а). Ясно, что в таком случае пути из вершин этого цикла в вершину 1 отсутствуют, а потому количество остовных деревьев такого орграфа с корнем в вершине 1 равняется нулю. Покажем теперь, что и соответствующий такому орграфу определитель  $\det(L_{1,1}^-) = 0$ . Соответствующая такому графу  $D$  матрица  $L_{1,1}^-$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Видно, что линейная комбинация строк, отвечающих вершинам цикла, равна нулю. Аналогичная ситуация будет наблюдаться и в общем случае: сумма отвечающих вершинам цикла строк будет равняться нулю. Действительно, исходящему из вершины  $i$  ребру отвечает единица, стоящая в  $i - 1$  столбце на диагонали. Но в эту же вершину входит и ровно одно ребро из какой-то другой вершины  $j$ . Это означает, что где-то в том же столбце обязана стоять и  $-1$ . Суммируя все такие строки, мы получаем нулевую строку. Тем самым мы показали, что эти строки линейно зависимы, а значит, определитель  $\det(L_{1,1}^-) = 0$ .

**1.3.6.** Рассмотрим, наконец, ситуацию, при которой в орграфе любой замкнутый ориентированный цикл, если он вообще существует, проходит через вершину 1 (рис.7,b). В этом случае, стартуя из любой вершины  $i > 1$ , мы обязательно придем в вершину 1. Удаляя все ребра, исходящие из 1 (а такие ребра ни в одно нужное нам остовное дерево не войдут), мы превратим  $D$  в ориентированное остовное дерево, все ребра которого направлены к вершине 1 (рис.7,c). Так как такое дерево получается однозначно, то в  $D$  существует единственное нужное нам остовное дерево. Все, что нам осталось показать — это то, что в данном случае определитель  $\det(L_{1,1}^-) = 1$ .

С точки зрения матрицы  $L^-$  удаление ребер, исходящих из 1, означает обнуление первой строки этой матрицы. Иными словами, на матрицу  $L_{1,1}^-$  эти операции никак не повлияют. Так, для орграфа  $D$ , показанного на рис.7,b, матрицы

$$L^-(D) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_{1,1}^-(D) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выберем теперь в остовном дереве, полученном после удаления всех исходящих из 1 ребер, какой-то лист  $i$  (вершина  $i = 2$  на рис.7,c), и рассмотрим соответствующий этому листу столбец матрицы  $L_{1,1}^-$  (первый столбец матрицы  $L_{1,1}^-(D)$  для орграфа из рис.7,c). Диагональный элемент этого столбца равен единице. Остальные элементы этого столбца равны нулю — в вершину  $i$  никакие ребра из других вершин орграфа  $D$ , отличных от 1, не приходят. Раскладывая тогда определитель матрицы по этому столбцу, мы по индукции приходим к равенству  $\det(L_{1,1}^-) = 1$ . Теорема Татта доказана.

**1.3.7.** Заметим, что из теоремы Татта легко получить матричную теорему о количестве  $t(G)$  остовных деревьев в неориентированном графе  $G$ . Заменим для этого в графе  $G$  любое неориентированное ребро на пару ребер, ориентированных в двух различных направлениях. Выбирая теперь произвольную вершину  $x$  полученного орграфа  $D$ , мы можем записать, что

$$t(G) = t^-(D, x).$$

Действительно, любому корневному ориентированному дереву, все ребра которого направлены к вершине  $x$ , отвечает некоторое остовное дерево графа  $G$ , полученное из корневого ориентированного дерева заменой ориентированных ребер на неориентированные. Обратно, пусть  $T$  есть остовное дерево графа  $G$ . Ориентируя ребра  $T$  единственным образом по направлению к выбранной вершине  $x$ , мы получим в  $D$  корневое ориентированное дерево, все ребра которого направлены в сторону вершины  $x$ .

Кроме того, заметим, что в рассматриваемом случае имеет место равенство

$$t^+(D, x) = t^-(D, x).$$

Действительно, для его доказательства достаточно в орграфе  $D$  заменить ориентацию всех его ребер на противоположную.

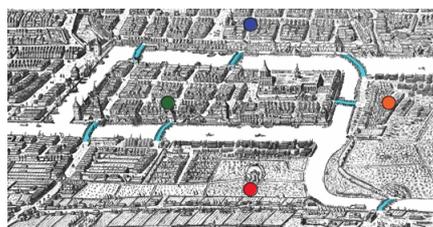
## 2 Эйлеровы циклы

**2.1.** Обратимся теперь к самой первой по времени содержательной задаче теории графов — задаче о кенигсбергских мостах (смотри рис.8,a), которая была предложена жителями горо-

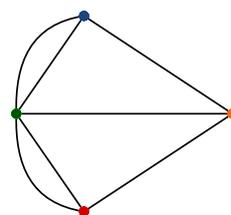
да Кенигсберга (ныне — Калининграда) для решения Леонарду Эйлеру в тридцатых годах восемнадцатого века.

**2.1.1.** Вот как описывал постановку задачи сам Эйлер: “Некогда мне была предложена задача об острове, расположенном в городе Кенигсберге и окруженном рекой, через которую перекинута семь мостов. Спрашивается, может ли кто-нибудь обойти их, переходя только однажды через каждый мост. И тут же мне было сообщено, что никто до сих пор не мог это проделать, но никто и не доказал, что это невозможно. Вопрос этот, хотя и банальный, показался мне, однако, достойным внимания тем, что для его решения недостаточны ни геометрия, ни алгебра, ни комбинаторное искусство...”. Эйлер не только решил эту задачу, но и установил необходимое условие, позволяющее определить, можно ли обойти любой город, имеющий мосты, так, чтобы пройти по всем мостам, не проходя дважды ни по одному из них.

**2.1.2.** Для решения задачи о кенигсбергских мостах вслед за Эйлером нам следует, прежде всего, формализовать эту задачу. Именно, построим упрощенную схему города, заменяя части города точками — вершинами графа, а мосты — дугами, то есть ребрами этого графа (смотри рис.8,а). В результате мы приходим к графу, изображенному на рис.8,б.



(a) Кёнигсберг



(b) Граф

Рис. 8: К задаче о кёнигсбергских мостах

Теперь настало время дать несколько дополнительных определений.

**Определение 2.1.** *Эйлеровым путем* в произвольном (не обязательно простом) графе  $G$  называется путь, который проходит через *каждое* ребро графа ровно один раз. Эйлеров путь, начинающийся и заканчивающийся в одной и той же вершине, называется *эйлеровым циклом*  $C$ .

**Определение 2.2.** Любой граф  $G$ , в котором существует эйлеров цикл  $C$ , называется *эйлеровым графом*. Граф, в котором существует эйлеров путь, называется *полуэйлеровым*.

Итак, нам нужно определить, является ли граф, изображенный на рис.8,б, эйлеровым. Эйлер ответил на этот вопрос отрицательно, доказав следующее необходимое условие существования эйлерова цикла в графе.

**Теорема 2.3** (Необходимое условие существования эйлерова цикла в графе). *Для существования в графе эйлерова цикла необходимо, чтобы он имел как максимум одну нетривиальную (то есть отличную от одиночных вершин) компоненту связности, и чтобы все вершины этого графа имели четную степень.*

**Доказательство** этого факта довольно несложно. Предположим, что в графе  $G$  существует эйлеров цикл  $C$ . При движении вдоль этого цикла мы посещаем каждое ребро в графе лишь однажды. Следовательно, войдя в какую-то из вершин по одному ребру, мы должны выйти из этой же вершины по какому-то другому ребру. При этом количество входов в любую вершину

должно совпадать с количеством выходов. Удовлетворить этим требованиям мы можем лишь тогда, когда степень любой вершины является четной. Кроме того, если два ребра принадлежат одному и тому же циклу  $C$ , то они, очевидно, лежат в одной и той же связной компоненте графа  $G$ . Как следствие,  $G$  может содержать как максимум одну нетривиальную связную компоненту.  $\square$

В графе, представленном на рис.8,b, имеются вершины нечетных степеней. Следовательно, эйлерова цикла в нем не существует.

**2.1.3.** Эйлер оставил без доказательства достаточность сформулированного им условия. Первое полное доказательство теоремы об эйлеровом цикле было дано немецким математиком Карлом Хиерхолцером лишь в 1873 году.

**Теорема 2.4** (Достаточное условие существования эйлерова цикла в графе). *Для того, чтобы граф имел эйлеров цикл, достаточно, чтобы он имел как максимум одну нетривиальную компоненту, и чтобы любая его вершина имела четную степень.*

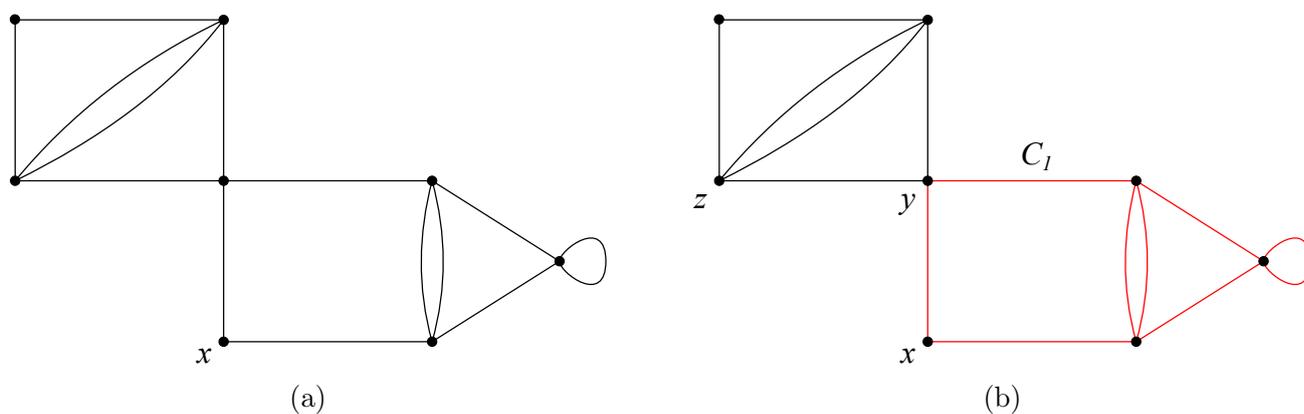


Рис. 9

**Доказательство.** Выберем в нетривиальной компоненте связности графа  $G$ , все вершины которого имеют четную степень (рис. 9,a), произвольную вершину  $x \in V(G)$ . Будем совершать обход этого графа, проходя по каждому ребру лишь один раз, до тех пор, пока мы не сможем двигаться дальше, не нарушая это условие (иными словами, будем пытаться строить наибольший по включению путь в графе). Так как любая вершина в графе имеет четную степень, то войдя в любую вершину графа, отличную от  $x$ , по одному из ребер, мы всегда сможем из нее выйти по какому-то другому ребру. Единственным исключением в этом смысле является сама вершина  $x$ : как только мы вернемся в нее, обойдя по разу каждое из инцидентных  $x$  ребер, то мы уже не сможем из нее выйти. Итак, процесс обхода неизбежно закончится в вершине  $x$ . Иными словами, мы доказали, что любой наибольший по включению путь в графе, все степени вершин которого четны, представляет собой замкнутый путь.

Обозначим полученный в процессе такого обхода графа  $G$  замкнутый путь через  $C_1$  (см. рис. 9(b), на котором входящие в  $C_1$  ребра помечены красным цветом). Если он совпал со всем графом, то все доказано — граф  $G$  является эйлеровым. В противном случае у нас в графе остались какие-то ребра, через которые мы еще не прошли (ребро  $e$  на рис.9,b). Так как у нас имеется лишь одна нетривиальная компонента связности, то и  $e$ , и  $C_1$  ей принадлежат. Следовательно, у нас имеется кратчайший путь, соединяющий  $e$  с вершиной  $x$ , а значит, и ребро  $e'$ , инцидентное одной из вершин  $C_1$  (вершина  $y$  на рис.9,b), но самому замкнутому пути  $C_1$  не принадлежащее (см. рис.9,b).

Введем тогда подграф  $G - E(C_1)$ , образованный ребрами, не вошедшими в  $C_1$ , и повторим для него описанную выше процедуру обхода, начинающуюся с вершины  $y$ . Полученный в результате такого обхода замкнутый путь  $C_2$  можно объединить с  $C_1$  в единый замкнутый путь  $C_1 \cup C_2$ . Действительно, стартуя с точки  $x \in C_1$ , мы можем остановиться в точке  $y \in C_1$ , обойти все ребра из  $C_2$ , а затем продолжить обход по оставшейся части  $C_1$ . Если теперь  $C_1 \cup C_2 = G$ , то все доказано. Если же нет, то нам следует продолжить описанный выше алгоритм до тех пор, пока полученное на  $k$ -м шаге объединение замкнутых путей  $C_1 \cup \dots \cup C_k$  не совпадет со всем графом  $G$ .  $\square$

**Замечание 2.5.** Проведенное доказательство достаточности достаточно легко превращается в алгоритм поиска эйлерова цикла в произвольном графе  $G$ , работающий за полиномиальное по количеству ребер в графе время.

**2.1.4.** Обобщением эйлерова графа является понятие так называемого *четного* графа.

**Определение 2.6.** Граф  $G$  называется четным, если любая его вершина имеет четную степень.

Итак, в случае связного графа  $G$  мы выше доказали следующее утверждение.

**Теорема 2.7.** *Связный граф  $G$  является эйлеровым тогда и только тогда, когда он четный.*

Из этой теоремы немедленно вытекает и следующее

**Следствие 2.8.** *Связный граф  $G$  имеет эйлеров путь, начинающийся в вершине  $x \in V(G)$  и заканчивающийся в некоторой другой вершине  $y \in V(G)$ , тогда и только тогда, когда степени вершин  $x$  и  $y$  нечетные, а степени всех остальных вершин являются четными.*

**Доказательство.** Действительно, добавим к графу  $G$  еще одно дополнительное ребро, соединяющее точки  $x$  и  $y$ . Полученный в результате граф имеет эйлеров цикл тогда и только тогда, когда исходный граф  $G$  имеет эйлеров путь, соединяющий точки  $x$  и  $y$ . Это обстоятельство и доказывает следствие 2.8.  $\square$

**2.1.5.** Описанные выше результаты достаточно легко обобщаются на случай эйлеровых циклов в ориентированных графах.

**Определение 2.9.** Эйлеровым циклом в орграфе  $D$  называется замкнутый путь, содержащий все ребра орграфа  $D$ . Орграф  $D$  называется эйлеровым, если в нем имеется хотя бы один эйлеров цикл.

**Теорема 2.10.** *Орграф  $D$  является эйлеровым тогда и только тогда, когда*

$$\text{outdeg}(x) = \text{indeg}(x) \quad \text{для любой вершины } x \in V(D),$$

*а соответствующий  $D$  underlying graph  $G$  имеет не более одной нетривиальной компоненты связности, то есть компоненты связности, отличной от изолированной вершины.*

**Доказательство.** практически аналогично доказательству теоремы Эйлера для неориентированных графов. В частности, совершенно аналогично показывается, что любой наибольший по включению ориентированный путь замкнут. Далее, мы вновь выбираем произвольную вершину  $x \in V(D)$  и пытаемся построить из нее наибольший по включению замкнутый путь  $C_1$ . Если он обходит все ребра  $D$ , то все доказано. Иначе осталось некоторое ребро  $e \notin C_1$ . Так как и  $x$ , и  $e$  принадлежат соответствующей  $D$  нетривиальной компоненте underlying graph  $G$ , то имеется

путь кратчайшей длины между  $e$  и  $x$ , а значит, ребро  $e'$ , инцидентное вершине  $y \in C_1$  и не принадлежащее  $C_1$ . Это ребро может как входить в  $y$ , так и выходить из нее. Рассматривая тогда в орграфе  $D - E(C_1)$  наибольший по включению путь, исходящий из  $y$ , мы некоторый замкнутый путь  $C_2$ . Если объединение  $C_1 \cup C_2$  не покрывает все ребра орграфа  $D$ , то продолжаем описанный процесс до тех пор, пока на  $k$ -м шаге не построим замкнутый путь, обходящий все ребра орграфа.  $\square$

**2.2.** Доказанная в предыдущей главе теорема Татта о количестве остовных деревьев в орграфе  $D$  позволяет подсчитать количество эйлеровых циклов в произвольном ориентированном эйлеровом графе  $D$ . Этот результат известен как the BEST theorem. Свое название теорема получила по первым буквам фамилий математиков, ее доказавшим: в 1941 году Cedric Smith и William Tutte подсчитали количество эйлеровых циклов в графе, исходящая степень вершин которого равна двум, а в 1951 году Nicolaas de Bruijn и Tatyana van Aardenne-Ehrenfest обобщили эту формулу на случай произвольного значения исходящих степеней вершин орграфа.

**Теорема 2.11** (de Bruijn, van Ardenne-Ehrenfest, Smith, and Tutte). *Количество  $e(D)$  эйлеровых циклов в орграфе  $D$  рассчитывается по формуле*

$$e(D) = t^-(D, x) \cdot \prod_{y \in D} (\text{outdeg}(y) - 1)!,$$

где  $x$  — произвольная вершина орграфа  $D$ ,  $t^-(D, x)$  — количество корневых остовных деревьев, все ребра которых направлены к корню в вершине  $x$ .

**Следствие 2.12.** *Количество  $t^-(D, x)$  корневых остовных деревьев в эйлеровом орграфе  $D$  не зависит от выбора корня, то есть вершины  $x$ .*

**2.2.1.** Зафиксируем произвольную вершину  $x$  в орграфе  $D$  (вершина 1 на рис.10), а также некоторое ребро  $e = (x, y)$ , являющееся стартовым ребром для любого эйлерова цикла  $W$  в графе (ребро  $e_1 = (1, 3)$  на рис.10). Покажем вначале, как по эйлерову циклу построить остовное дерево с корнем в вершине  $x$ .

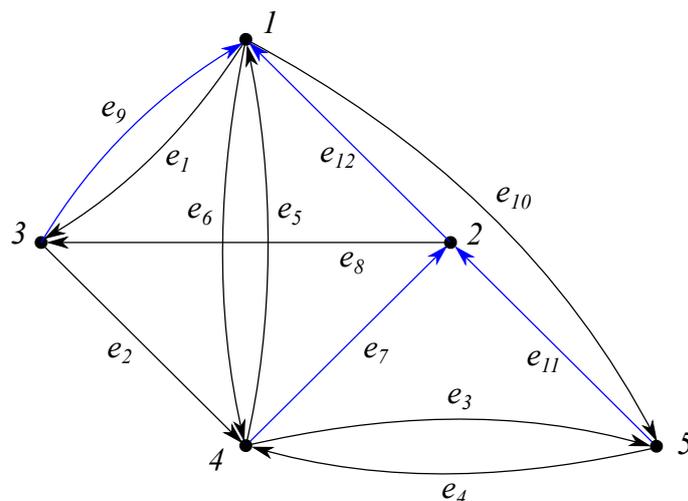


Рис. 10

Мы знаем, что эйлеров цикл проходит по каждому ребру орграфа  $D$  ровно один раз, задавая на множестве  $E(D)$  ребер некоторый линейный порядок (см. ребра  $e_1, \dots, e_{12}$  на рис.10). Кроме

того, он хотя бы один раз проходит через каждую вершину орграфа  $D$ . Выберем для каждой вершины  $y \neq x$  исходящее из  $y$  ребро с наибольшим номером (см. ребра, помеченные синим цветом на рис.10). Покажем, что порожденный этими ребрами подграф  $T$  представляет собой корневое остовное дерево с корнем в вершине 1.

Действительно, мы построили какой-то остовный подграф, состоящий из  $(n-1)$ -го ребра. Покажем, что в таком подграфе циклы отсутствуют. Действительно, если бы мы, выйдя из какой-то вершины  $z$  по ребру  $e_i$ , вошли бы в нее же по какому-то ребру  $e_j$ , то мы должны были бы получить, что  $j > i$ . Но мы обходим вершины орграфа  $D$  по эйлеровому циклу, начинающемуся в вершине 1. Это означает, что, войдя в какую-то вершину  $z \neq x$  по ребру с номером  $j$ , мы выйти из нее должны по ребру с номером  $j+1$ . Но тогда ребро  $e_i$  — это не ребро с наибольшим номером, выходящее из вершины  $z$ . Получили противоречие. Таким образом, синие ребра в орграфе  $D$  циклов не образуют, покрывают все вершины орграфа, а количество этих ребер равняется  $n-1$ . Следовательно, эти ребра порождают остовное дерево в орграфе  $D$  с корнем в вершине 1.

**2.2.2.** Рассмотрим теперь какое-то остовное дерево  $T$ , все ребра которого направлены к корню в вершине  $x$ . Нам нужно понять, сколько различных эйлеровых циклов мы сможем построить из одного и того же остовного дерева  $T$ . Для этого давайте пронумеруем (с повторениями) все ребра орграфа  $D$  согласно следующему принципу. Зафиксированному в самом начале ребру  $(x, y)$ , с которого, как мы договорились, будут начинаться все эйлеровы циклы в орграфе  $D$ , мы присвоим номер 1 (ребро  $e_1$  на рис.10). Остальным  $\text{outdeg}(x) - 1$  ребрам назначим  $(\text{outdeg}(x) - 1)!$  количеством способов произвольные номера из множества  $\{2, \dots, \text{outdeg}(x)\}$ . Для любой другой вершины  $z \neq x$  орграфа  $D$  мы присвоим номер, равный  $\text{outdeg}(z)$ , исходящему из вершины  $z$  ребру, принадлежащему остовному дереву. Остальным ребрам мы вновь  $(\text{outdeg}(z) - 1)!$  количеством способов назначим произвольные номера из множества  $\{1, \dots, \text{outdeg}(z) - 1\}$ . Всего, таким образом, мы получаем

$$d := \prod_{z \in D} (\text{outdeg}(z) - 1)!$$

способов пронумеровать ребра орграфа  $D$ .

Убедимся теперь, что любая такая нумерация ребер задает нам один из  $d$  ориентированных эйлеровых циклов в орграфе  $D$ . Для этого при заданной нумерации ребер определим маршрут в орграфе  $D$  следующим образом. Начнем маршрут с ребра  $(x, y)$ , помеченного номером 1. При заходе в любую вершину  $z$  орграфа покинем эту вершину по еще не использованному ребру с наименьшим номером. Так как при входе в любую вершину  $z \neq x$  у нас количество исходящих из  $z$  ребер на единицу больше количества входящих, то мы всегда из  $z$  сможем перейти в какую-то другую вершину. Остановиться же мы сможем только в вершине  $x$ . При этом все входящие в  $x$  ребра к этому моменту будут уже использованы. По построению это означает, что использованными оказались все ребра каждой из вершин, находящихся на расстоянии 1 от корня в остовном дереве. Далее по индукции можно показать, что использованными оказались вообще все ребра орграфа  $D$ .

**2.2.3.** Итак, мы для любого остовного дерева построили  $d$  различных эйлеровых циклов в  $D$ . Кроме того, различные остовные деревья порождают нам различные множества эйлеровых циклов. Таким образом,  $e(D)$  действительно равно  $t^-(D, x) \cdot d$ . Теорема доказана.

**2.3.** Как мы уже упоминали, эйлеровы графы встречаются в самых разнообразных практических задачах. В качестве очень красивого и полезного примера остановимся на одной из таких задач — задаче о последовательностях де Брейна.

**2.3.1.** Формальная постановка задачи такова: найти наименьшую циклическую последовательность (циклическое слово) над алфавитом из  $n$  букв, содержащую все возможные подстроки длины  $k$  (так называемые  $k$ -меры).

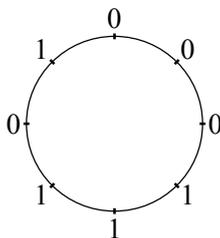


Рис. 11: Циклическая последовательность  $B(2, 3)$

**Пример 2.13.** Рассмотрим циклические последовательности над алфавитом из двух букв — чисел 0 и 1, содержащие все возможные подпоследовательности длины три (тримеры). Таковых, как мы знаем, существует  $2^3 = 8$  штук — восемь первых чисел в двоичной системе исчисления:

000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111.

Расставляя их по кругу, мы, конечно же, получаем циклическую последовательность, состоящую из  $k \cdot n^k = 3 \cdot 2^3 = 24$  символов и содержащую все возможные тримеры. Однако такое слово минимальным не будет — несложно видеть, что изображенная на рис.11 циклическая последовательность длины  $2^3 = 8$  содержит все тримеры, причем каждый из них она содержит по одному разу. Понятно, что циклическую последовательность длины меньшей, чем  $2^3$ , построить невозможно — она не сможет содержать все 8 тримеров. Поэтому показанная на рис.11 циклическая последовательность минимальна.

Проведенные в примере 2.13 рассуждения позволяют предположить, что и в общем случае для произвольных  $n$  и  $k$  минимальная циклическая последовательность над алфавитом из  $n$  букв, содержащая все  $n^k$  возможных  $k$ -меров, также имеет длину  $n^k$ . В этой связи возникают сразу три вопроса — как доказать это предположение, как понять, сколько таких минимальных строк существует, ну и наконец, как их всех найти.

На все эти вопросы дал ответ Николас де Брейн в своей работе [?] 1946 года. Во-первых, он доказал, что действительно для произвольных  $n$  и  $k$  существуют циклические последовательности длины  $n^k$  над алфавитом из  $n$  букв, содержащие все возможные  $k$ -меры — в его честь такие циклические последовательности называют теперь *последовательностями де Брейна*  $B(n, k)$  порядка  $k$ . Во-вторых, он подсчитал количество таких последовательностей. Наконец, он указал конструктивный алгоритм построения этих последовательностей. И сделал он это, построив для заданных  $n$  и  $k$  некоторый орграф специального вида.

**2.3.2.** Итак, попытаемся, вслед за де Брейном, сопоставить множеству всевозможных  $k$ -меров над алфавитом из  $n$  букв некоторый орграф  $D$ , обход которого даст нам какую-то циклическую последовательность  $B(n, k)$  длины  $n^k$ . Как правило, первое, что приходит в голову при анализе этой задачи, это взять в качестве вершин будущего графа все  $k$ -меры, и соединить любые две вершины направленным ребром в том случае, если  $(k - 1)$ -мер, отвечающий суффиксу первой вершины, совпадает с  $(k - 1)$ -мером, соответствующим префиксу второй.

Так, на рис.12 показан орграф, построенный с помощью этого алгоритма для разобранного выше примера 2.13. В этом орграфе, к примеру, вершина 011 соединена с вершиной 110 ребром потому, что суффикс первой из них — 2-мер 11 — совпадает с префиксом второй.

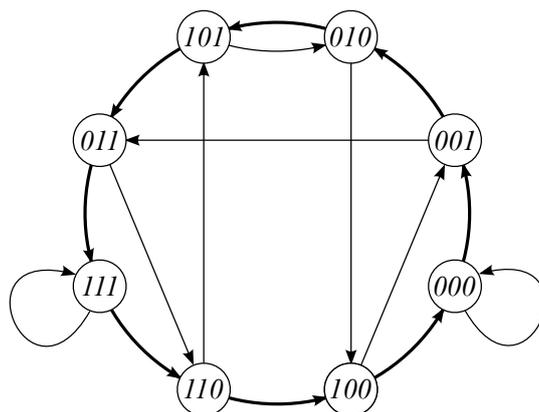


Рис. 12: Построение циклической последовательности с помощью гамильтонова цикла в графе

Заметим теперь, что обход этого орграфа по простому циклу, содержащему все вершины (помеченный жирными стрелками на рис.12 цикл), позволяет построить одну из искомым нами циклических последовательностей  $B(2, 3)$ , а именно, последовательность 11101000. Тот же факт справедлив и в общем случае. Иными словами, при таком подходе задача поиска циклической последовательности  $B(n, k)$  сводится к построению гамильтонова цикла в орграфе  $D$ .

**2.3.3.** На первый взгляд кажется, что мы решили поставленную задачу — действительно, нам удалось формализовать задачу поиска последовательностей де Брейна на языке теории графов. Однако у такого решения имеется множество недостатков. Во-первых, априори совсем не очевидно, что гамильтонов цикл у любого такого графа существует. Во-вторых, даже если он и существует, то непонятно, как его там искать — как мы знаем, задача построения гамильтонова цикла весьма нетривиальна. Наконец, если такие циклы и существуют, то не ясно, как подсчитать их количество.

Основное достижение де Брейна состояло в том, что он предложил другой, далеко не столь очевидный, подход к формализации данной задачи. Как показал де Брейн, эту задачу можно изящно переформулировать, сведя ее к к сравнительно легко решаемой задаче построения эйлерова цикла в орграфе специального вида — графе де Брейна.

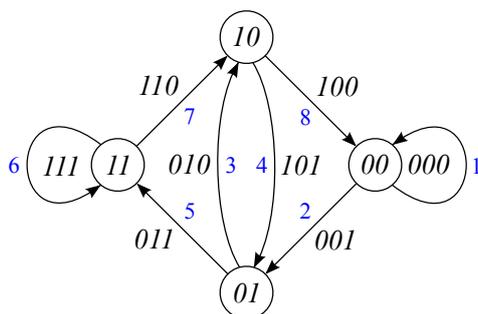


Рис. 13: Граф де Брейна для  $n = 2, k = 3$

Алгоритм построения графа де Брейна следующий: возьмем в качестве вершин орграфа вместо  $k$ -меров все возможные  $(k - 1)$ -меры (их, очевидно,  $n^{(k-1)}$  штук) и свяжем любые две из них ориентированным ребром в случае, если существует  $k$ -мер, префиксом которого является первая вершина, а суффиксом — вторая.

На рис.13 показан граф де Брейна, построенный для данных из примера 2.13. Так как существуют тримеры 010 и 011, то вершина 01 соединена в этом графе с вершинами 10 и 11. Двум

входящим в эту вершину ребрам отвечают тримеры 101 и 001. Так как к любому 2-меру можно двумя способами слева приписать единицу или ноль, и справа приписать единицу и ноль, то аналогичный факт справедлив и для любой другой вершины — в любую вершину входят ровно  $n = 2$  ребра и выходят из этой вершины также ровно  $n = 2$  ребра. Как следствие, в таком орграфе обязательно существует эйлеров цикл. Обход графа по эйлерову циклу 000, 001, 010, 101, 011, 111, 110, 100 позволяет восстановить искомую циклическую последовательность  $B(2, 3) = 00010111$ .

Аналогичные рассуждения проходят и в общем случае. Следовательно, любой граф де Брейна является эйлеровым, а любой эйлеров цикл в нем отвечает некоторой последовательности де Брейна  $B(n, k)$ .

Итак, построив для любых  $n$  и  $k$  граф де Брейна, мы доказали существование соответствующей последовательности де Брейна. Далее, используя алгоритмы поиска эйлеровых циклов в орграфе, мы можем находить такие последовательности. Осталось понять, сколько всего таких последовательностей существует. Де Брейн ответил и на этот вопрос, доказав, что их количество равно  $(n!)^{n^{k-1}}/n^k$ . Два различных доказательства этого результата — комбинаторное и алгебраическое — можно найти, например, в учебнике [?].

**2.3.4.** Как это часто бывает в прикладной математике, задача, очень похожая на рассмотренную выше, возникла относительно недавно еще в одной, достаточно молодой области прикладной математики — в биоинформатике [?]. Одной из наиболее актуальных задач в этой науке является задача асемблирования (сборки) геномов из так называемых ридов (reads) — относительно коротких (содержащих порядка 100 символов — нуклеотидов) строк над 4-буквенным алфавитом  $\{A, C, G, T\}$ , получаемых в результате секвенирования (разделения) генома (а точнее, очень большого количества одинаковых геномов). Первые методы сборки генома из таких ридов как раз и базировались на построении графа, вершинам которого сопоставлялись риды, а ребрам — перекрытия между этими ридами фиксированной длины. При этом исходный геном восстанавливался с помощью построения гамильтонова цикла в подобном графе.

Рассмотрим в качестве простейшего примера очень короткий циклический геном, показанный на рис.14,а. Предположим, что в результате секвенирования мы получили из него пять ридов CGTGCAA, ATGGCGT, CAATGGC, GGCGTGC и TGCAATG длины 7. Соответствующий этой последовательности ридов граф показан на рис.14,б. Каждому из пяти ридов поставлена в соответствие одна из вершин этого графа. Две вершины соединяются ребром в случае, если ширина перекрытия соответствующих ридов составляет пять нуклеотидов (см. рис.14,б). Проход по гамильтонову циклу

$$ATGGCGT \rightarrow GGCGTGC \rightarrow CGTGCAA \rightarrow TGCAATG \rightarrow CAATGGC \rightarrow ATGGCGT$$

позволяет путем объединения первых двух нуклеотидов в каждом риде восстановить исходный геном ATGGCGTGCA.

Более современные методы сборки геномов обычно работают со строками определенной длины  $k$  (которые как раз и называются  $k$ -мерами), значительно более короткими, нежели исходные риды. Например, типичный 100-нуклеотидный рид разбивается вначале на 55-меры, длина перекрывающихся участков которых равна сорока шести. В нашем модельном примере каждый 7-нуклеотидный рид разбивается на пять 3-меров, перекрывающихся между собой по двум нуклеотидам (см. рис.14,с,д). Даже для этого примера найти соответствующий исходному геному гамильтонов цикл нелегко. В реальной же ситуации из одного генома в процессе секвенирования получают миллионы ( $10^6$ ) ридов, триллионы ( $10^{12}$ )  $k$ -меров, то есть графы с огромным

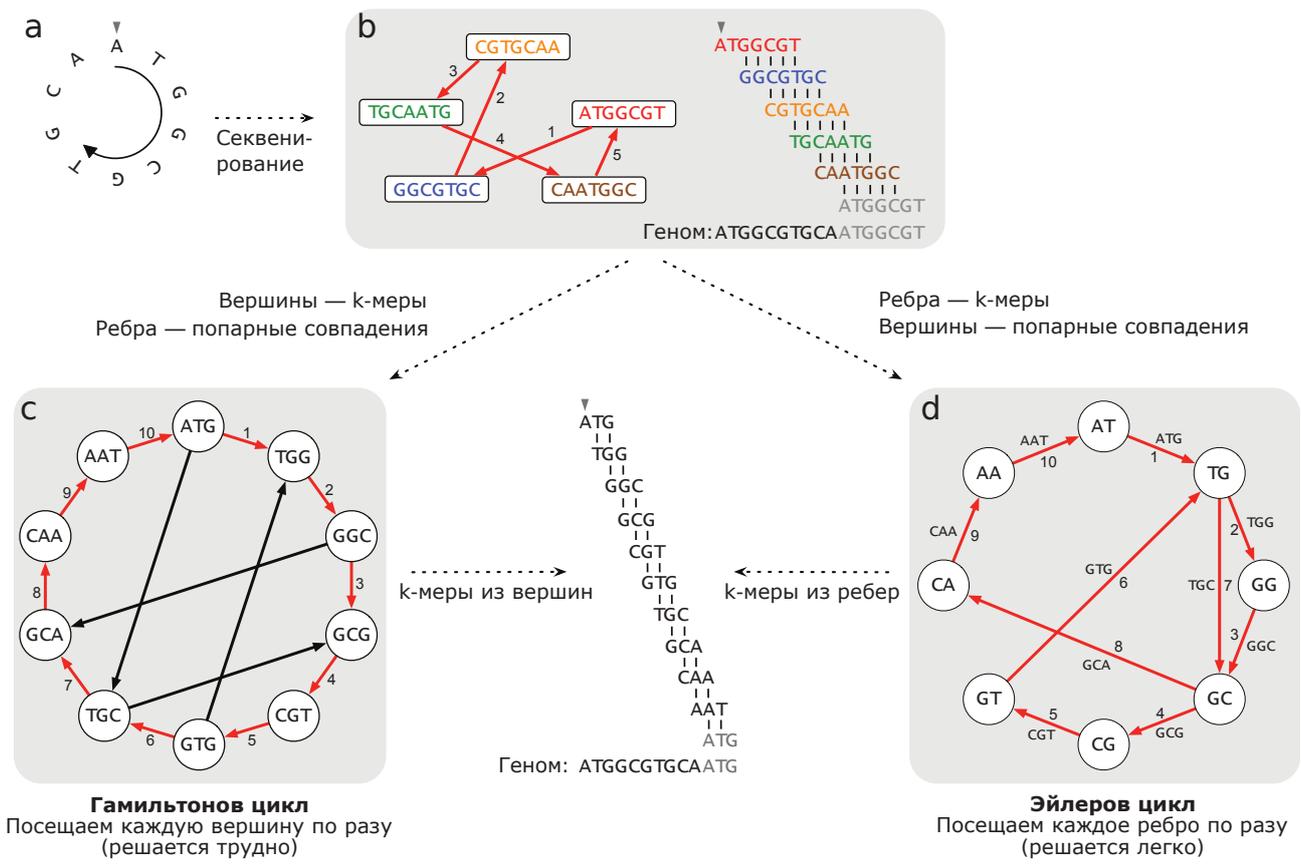


Рис. 14: Сборка простейшего генома

количеством вершин. Задача поиска гамильтонова цикла в таком графе практически нерешаема.

Павел Певзнер в 1989 году предложил для таких случаев использовать подход де Брейна. Переход от задачи поиска гамильтонова цикла в графе (рис.14,с) к задаче поиска эйлерова цикла (рис.14,d) существенным образом ускорил процесс асемблирования геномов и стал общепринятым в большинстве современных ассемблеров, предназначенных для сборки генома из коротких ридов.

### 3 Гамильтоновы циклы

**3.1.** Во многих практических задачах наряду с эйлеровыми циклами часто встречаются и так называемые *гамильтоновы циклы* — простые циклы, проходящие через каждую вершину графа.

**3.1.1.** Пожалуй, наиболее известная из таких задач — это так называемая *задача о коммивояжере*. В этой задаче торговец должен обойти все города из некоторого списка, заходя в каждый город только один раз, и вернуться в исходный город, с которого он начал свое путешествие. Обычно при этом указывается некоторый критерий оптимальности маршрута (кратчайший, самый дешевый и прочее). В случае, когда дополнительные критерии не указаны, задача сводится к поиску гамильтонова цикла в графе, вершинами которого являются города, а ребрами — соединяющие их дороги.

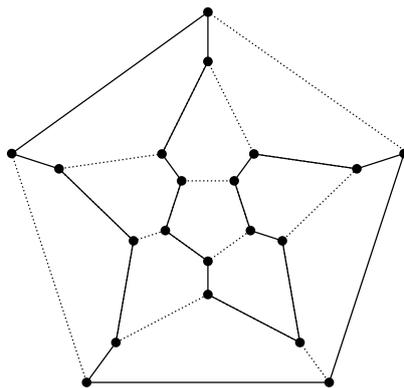


Рис. 15: Гамильтонов цикл в додекаэдре

Еще одна задача, собственно, и дала имя гамильтонову циклу — она была описана в письме Гамильтона своему другу в форме математической игры на додекаэдре (рис.15). В этой игре один из игроков должен был вставить палочки в любые пять последовательно идущих вершин додекаэдра, а второй — продолжить этот путь на все оставшиеся вершины. Иными словами, игроки должны были найти простой цикл, проходящий через все вершины додекаэдра. Одно из возможных решений показано на рис.15 (сплошные линии на рисунке).

**3.1.2.** Сразу заметим, что наличие петель и мультиребер на существование гамильтонова цикла в графе  $G$  никак не влияет. Поэтому далее мы будем полагать, что любые рассматриваемые в этом параграфе графы являются простыми.

**3.1.3.** Как и в случае эйлерова цикла, первый вопрос, который возникает при анализе подобного рода задач, связан с существованием гамильтонова цикла в заданном графе. Очевидными необходимыми условиями существования гамильтонова цикла в графе  $G$  является связность этого графа, а также отсутствие в нем вершин степени  $\deg(x) = 1$ , то есть листьев. Чуть менее тривиальным является следующее необходимое условие существования гамильтонова цикла в графе.

**Утверждение 3.1.** Пусть в графе  $G$  имеется гамильтонов цикл. Тогда количество  $k := c(G - S)$  компонент связности  $U_1, \dots, U_k$ , получающихся в результате удаления вершин некоторого непустого подмножества  $S \subset V(G)$  графа  $G$ , не превосходит количества удаленных вершин:

$$c(G - S) \leq |S|. \quad (5)$$

**Доказательство.** Начнем обход графа  $G$  по гамильтонову циклу  $C$  с произвольной вершины  $y$  компоненты  $U_1$  (рис.16). Выйти из этой компоненты  $U_1$  в другие компоненты  $U_i, i \neq 1$ , мы не можем, поэтому, выходя из  $U_1$ , мы должны прийти в какую-то вершину  $x_1 \in S$ . Аналогично, выходя из оставшихся компонент  $U_i$ , мы должны прийти в какие-то вершины  $x_i \in S$ . Так как мы обходим граф  $G$  по гамильтонову циклу  $C$ , то все вершины  $x_i \in S$  должны быть различными. Как следствие, количество вершин в множестве  $S$  должно быть больше или равно  $k$ .  $\square$

**3.1.4.** Основная проблема со всеми известными на сегодняшний момент необходимыми условиями существования гамильтонова цикла в графе состоит в том, что ни одно из них не является одновременно и достаточным. Конечно же, существуют графы, для которых вопрос о существовании гамильтонова цикла очевиден. Так, в любом циклическом графе  $C_n$ , построенном на  $n > 2$  вершинах, существует ровно один гамильтонов цикл. В графе  $K_2$  гамильтонов цикл не существует (хотя существует гамильтонов путь — простой путь, проходящий через все вершины графа). В случае полного графа  $K_n, n > 2$ , имеется  $(n - 1)!/2$  гамильтоновых циклов.

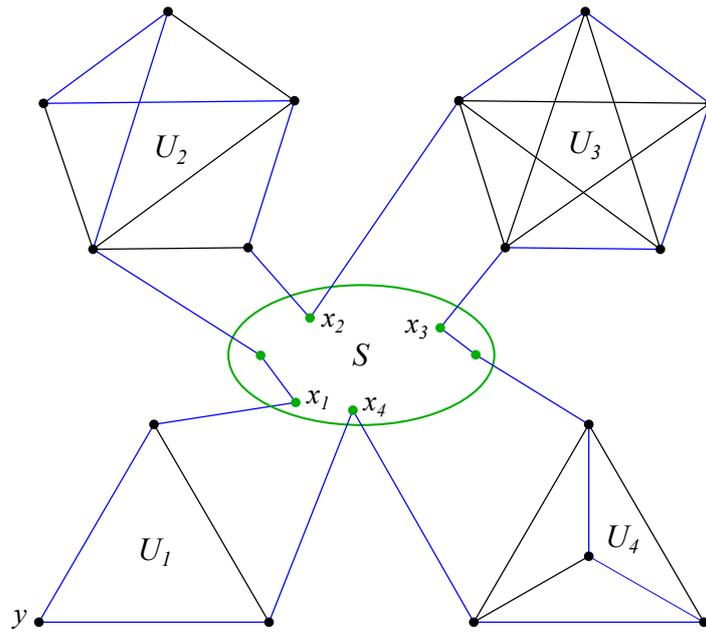


Рис. 16

В общем же случае ответ на вопрос, существует ли в данном графе гамильтонов цикл, совершенно нетривиален. В частности, на настоящий момент нет никаких простых критериев существования гамильтонова цикла, подобных тому, что мы сформулировали выше для, казалось бы, очень похожего понятия эйлерова цикла. Более того, в 1972 году Ричард Карп доказал, что задача определения того, существует ли в произвольном графе гамильтонов цикл, является  $NP$ -полной задачей.

Несмотря на это печальное обстоятельство, в теории графов все же имеется целый ряд достаточных условий существования гамильтонова пути или цикла в графе. Так, интуитивно понятно, что чем больше у простого связного графа, построенного на  $n$  вершинах, ребер, тем больше вероятность того, что в нем существует гамильтонов цикл. Это видно хотя бы из того, что в полном графе  $K_n$ , количество ребер в котором максимально, гамильтонов цикл гарантированно существует. Ниже мы сформулируем несколько результатов, которые формализуют это интуитивное наблюдение.

**3.1.5.** Предположим вначале, что мы смогли каким-то образом построить в простом графе  $G$  гамильтонов путь  $P = x_1, \dots, x_n$ ,  $n > 2$ , то есть простой путь, проходящий через каждую из вершин графа  $G$ . Возникает вопрос, когда мы этот путь можем достроить до гамильтонова цикла  $C$ . Ответ очевиден в том случае, когда концы построенного пути — вершины  $x_1$  и  $x_n$  — оказываются смежными. В этом случае мы всегда можем достроить путь  $P$  до гамильтонова цикла  $C$ , добавив к нему ребро  $\{x_1, x_n\}$ . Случай несмежных вершин  $x_1$  и  $x_n$  является уже не столь очевидным.

**Лемма 3.2.** Пусть в простом графе  $G$  имеется гамильтонов путь  $P = x_1, \dots, x_n$ ,  $n > 2$ , соединяющий пару несмежных вершин  $x_1$  и  $x_n$ . Достаточным условием существования гамильтонова цикла в таком графе является выполнение следующего неравенства:

$$\deg(x_1) + \deg(x_n) \geq n. \quad (6)$$

**Доказательство.** Основная идея доказательства этого утверждения довольно проста. Пусть в

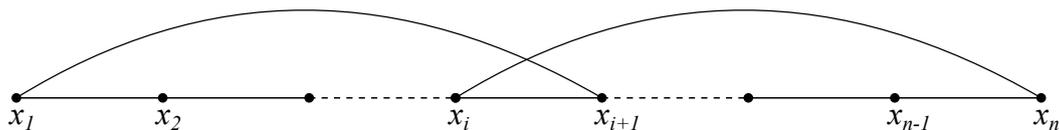


Рис. 17: Построение гамильтонова цикла в графе

графе  $G$  существует гамильтонов путь

$$P = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

соединяющий несмежные между собой вершины  $x_1$  и  $x_n$ . Нам нужно показать, что в  $G$  обязательно существует принадлежащее этому пути ребро  $e = \{x_i, x_{i+1}\}$ , такое, что вершина  $x_{i+1}$  смежна с  $x_1$ , а вершина  $x_i$  смежна с  $x_n$  (рис.17). Тогда мы всегда сможем заменить путь  $P$  на гамильтонов цикл

$$C = (x_1, x_2, \dots, x_i, x_n, x_{n-1}, \dots, x_{i+1}, x_1).$$

Покажем, что такое ребро  $e$  обязательно найдется. Для этого предположим, что степень вершины  $x_1$  равна  $l$ . Покажем, что среди *любой*  $l$  отличных от  $x_n$  вершин графа  $G$  найдется хотя бы одна вершина, смежная с  $x_n$ . Действительно, если бы это было не так, то степень вершины  $x_n$  была бы меньше или равна  $(n - 1 - l)$ :  $n - 1$  — это максимальная степень вершины в графе с  $|V(G)| = n$ , а кроме того, из вершины  $x_n$  в  $l$  вершин ребра идти не могут. Это, в свою очередь, противоречит неравенству (6).

Теперь возьмем  $l$  смежных с  $x_1$  вершин графа  $G$  и отступим от этих вершин на одно ребро назад вдоль гамильтонова пути  $P$ . Получим набор из  $l$  вершин, одна из которых — какая-то вершина  $x_i$  — обязательно смежна с  $x_n$ . Тогда ребро  $\{x_i, x_{i+1}\}$  и будет нужным нам ребром  $e$ .  $\square$

**3.1.6.** Заметим, что на самом деле мы доказали чуть более общий результат, а именно:

**Следствие 3.3.** Пусть  $P = x_1, \dots, x_k$ ,  $k > 2$ , есть наибольший по включению простой путь в графе  $G$ . Тогда этот путь можно превратить в простой цикл  $C$  либо в случае, когда концы пути  $P$  — вершины  $x_1$  и  $x_k$  — являются смежными, либо в случае, когда сумма степеней этих вершин больше или равна  $k$ :

$$\deg(x_1) + \deg(x_k) \geq k. \quad (7)$$

**Доказательство.** Действительно, в случае, когда вершины  $x_1$  и  $x_k$  являются смежными, искомым цикл  $C$  получается добавлением к пути  $P$  ребра  $\{x_1, x_k\}$ .

Предположим, что вершины  $x_1$  и  $x_k$  оказались несмежными. Заметим, что эти вершины соединены ребрами только с какими-то другими вершинами того же пути — в противном случае мы смогли бы продолжить путь  $P$  на какие-то другие вершины.

Рассмотрим подграф  $H$ , индуцируемый всеми вершинами пути  $P$ . Согласно сделанному выше замечанию, степени вершин  $x_1$  и  $x_k$  в этом подграфе останутся прежними. Как следствие, неравенство (7) для этих вершин окажется верным и в подграфе  $H$ . Но в этом подграфе путь  $P$  является гамильтоновым. Следовательно, его можно превратить в гамильтонов цикл  $C$  способом, описанным при доказательстве леммы 3.2.  $\square$

**3.1.7.** Следующая теорема дает нам достаточные условия существования гамильтонова пути в графе.

**Теорема 3.4 (Оре).** Пусть  $G$  — простой граф, построенный на  $n > 2$  вершинах. Если для любых двух несмежных вершин  $x, y$  графа  $G$  выполняется условие

$$\deg(x) + \deg(y) \geq n - 1, \quad (8)$$

то граф  $G$  имеет гамильтонов путь.

**Доказательство.** Заметим, прежде всего, что любой граф  $G$ , удовлетворяющий условиям (8), является связным. Более того, длина кратчайшего пути, соединяющего произвольную пару несмежных вершин, равна двум. Действительно, рассмотрим произвольную пару несмежных вершин  $x$  и  $y$ . Условие (8) вместе с принципом Дирихле гарантирует нам, что среди оставшихся  $(n - 2)$ -х вершин обязательно найдется хотя бы одна вершина  $z$ , смежная как с  $x$ , так и с  $y$ , то есть в графе существует путь  $\{x, z, y\}$ .

Теперь предположим, что у нас выполнено условие (8), а гамильтонов путь в графе  $G$  не существует. Это означает, что максимальный простой путь  $P$  в таком графе содержит  $k < n$  вершин. Ясно также, что длина такого пути больше или равна двум — если в графе существует пара несмежных вершин, то она соединена путем длины два, а если все вершины графа смежны между собой, то граф — полный, и там длина максимального пути равна  $n - 1$ . Наконец, если концевые вершины пути  $P$  не смежны, то в силу (8) сумма их степеней больше или равна  $n - 1$ , то есть больше или равна  $k$ . Все это дает нам основание воспользоваться следствием 3.3 и утверждать, что в графе  $G$  существует простой цикл длины  $k$ .

Так как  $k < n$  и граф  $G$  связан, то в  $G$  обязана существовать вершина  $y$ , не входящая в цикл  $C$  и смежная хотя бы с одной из вершин  $x \equiv x_1$  этого цикла  $C = (x_1, \dots, x_k)$ . Но в таком случае мы всегда можем построить в графе  $G$  простой путь  $y, x_1, x_2, \dots, x_k$  длины, большей, чем  $k$ , что противоречит предположению о том, что  $P$  есть путь максимальной длины. Полученное противоречие доказывает теорему.  $\square$

**3.1.8.** Сформулируем теперь несколько очевидных следствий из теоремы Оре.

**Следствие 3.5.** Пусть  $G$  — граф, построенный на  $n > 2$  вершинах. Если для любой пары несмежных вершин выполняется условие

$$\deg(x) + \deg(y) \geq n, \quad (9)$$

то в графе  $G$  имеется гамильтонов цикл.

**Доказательство.** Действительно, в силу теоремы Оре, в таком графе обязан существовать гамильтонов путь  $P = x_1, \dots, x_n$ . Согласно следствию 3.3, его всегда можно превратить в гамильтонов цикл.  $\square$

**Следствие 3.6 (Дирак).** Пусть  $G$  — простой граф на  $n > 2$  вершинах. Если степень каждой из его вершин больше или равна  $(n - 1)/2$ , то в графе существует гамильтонов путь, а если больше или равна  $n/2$  — то в нем существует и гамильтонов цикл.

**3.2.** Исторически первым достаточным условием существования гамильтонова цикла в графе была теорема Дирака, доказанная им в 1952 году. Эта теорема явилась отправной точкой для получения целого ряда все более и более слабых условий на степени вершин графа, достаточных для существования гамильтонового цикла в нем. Теорема Оре, доказанная в 1960 году, была одним из наиболее важных результатов на этом пути. В 1972 году Вацлав Хватал получил достаточное условие, охватывающее все полученные ранее результаты. Для того, чтобы его сформулировать, нам понадобятся некоторые дополнительные понятия и факты.

**3.2.1.** Прежде всего, докажем следующее несложное следствие теоремы Оре.

**Лемма 3.7.** Пусть  $G$  есть простой граф, в котором существует пара несмежных между собой вершин  $x, y$ , суммарная степень которых больше или равна  $n$ . Тогда в  $G$  существует гамильтонов цикл тогда и только тогда, когда он существует в графе  $G + \{x, y\}$ .

**Доказательство.** В одну сторону утверждение очевидно — если в графе  $G$  существует гамильтонов цикл, то уж тем более он существует и в графе  $G + \{x, y\}$ . Обратное, предположим, что в  $G + \{x, y\}$  существует гамильтонов цикл. Тогда в графе  $G$  существует гамильтонов путь с концами в вершинах  $x$  и  $y$ , который мы всегда можем трансформировать в гамильтонов цикл способом, описанным при доказательстве леммы 3.2.  $\square$

**3.2.2.** Теперь сформулируем следующее полезное понятие.

**Определение 3.8.** Замыканием  $C(G)$  графа  $G$  называется граф, полученный из  $G$  последовательным соединением в нем ребрами пар несмежных между собой вершин, суммарные степени которых больше или равны  $n$ , до тех пор, пока ни одной такой пары в графе не останется.

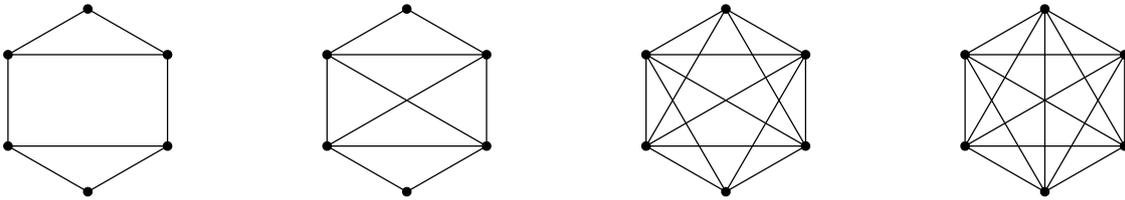


Рис. 18: Построение замыкания графа  $G$

В качестве примера на рис.18 показано замыкание графа  $G$ , представляющее собой полный граф  $K_6$ .

**Замечание 3.9.** Граф  $C(G)$ , полученный в результате процедуры замыкания графа  $G$ , не зависит от порядка выбора ребер, соединяющих несмежные вершины в графе  $G$ .

**Доказательство.** Обозначим через  $e_1, \dots, e_r$  и  $f_1, \dots, f_s$  последовательности ребер, добавляемых в процессе получения замыканий  $G_1$  и  $G_2$  графа  $G$ . Покажем, что любое ребро  $e_i$  присутствует в графе  $G_2$ , а каждое ребро  $f_j$  появляется в графе  $G_1$ . Действительно, предположим обратное. Пусть тогда  $e_k = \{x, y\}$  есть первое ребро в последовательности  $e_i$ , которое не вошло в граф  $G_2$ . Рассмотрим тогда граф  $H = G + \{e_1, \dots, e_{k-1}\}$ . Из определения графа  $G_1$  следует, что

$$\deg_H(x) + \deg_H(y) \geq n.$$

Но так как все  $e_i, i < k$  принадлежат  $G_2$ , то граф  $H$  является также и подграфом графа  $G_2$ , а потому

$$\deg_{G_2}(x) + \deg_{G_2}(y) \geq n.$$

Кроме того, так как в  $G_2$  ребро  $\{x, y\}$  отсутствует, то в графе  $G_2$  вершины  $x$  и  $y$  несмежны. А это, в свою очередь, противоречит алгоритму построения графа  $G_2$ . Следовательно,  $G_1 = G_2$ , так что  $C(G)$  определен однозначно.

**3.2.3.** Следствием сформулированной выше леммы 3.7 является следующее утверждение.

**Теорема 3.10** (Bondy-Chvatal, 1976). Простой граф  $G$  является гамильтоновым тогда и только тогда, когда его замыкание  $C(G)$  является гамильтоновым графом.

**Следствие 3.11.** Если  $C(G) = K_n$ , то граф  $G$  является гамильтоновым.

Так, в случае  $\delta(G) \geq n/2$  каждая пара несмежных вершин графа  $G$  должна быть соединена ребром, так что  $C(G) = K_n$ . Поэтому теорема Дирака есть частный случай теоремы 3.10.

**3.2.4.** Теперь мы готовы доказать наилучшую из известных оценок на степени вершин, гарантирующую существование гамильтонова цикла в графе.

**Теорема 3.12** (Chvatal, 1972). *Пусть  $G$  есть простой граф, построенный на  $n > 2$  вершинах, последовательность*

$$d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$$

*степеней вершин которого удовлетворяет следующему условию:*

$$\forall i < n/2 \quad \text{либо } d_i > i, \text{ либо } d_{n-i} \geq n - i. \quad (10)$$

*Тогда в  $G$  существует гамильтонов цикл.*

**Доказательство.** Мы покажем, что замыкание  $C(G)$  графа  $G$  является полным графом  $K_n$ . Будем доказывать это от противного. Именно, предположим, что  $C(G) \neq K_n$ . Выберем тогда в графе  $C(G)$  пару таких несмежных между собой вершин  $x, y$ , для которых сумма  $s$  степеней максимальна. Мы знаем, что эта сумма ограничена сверху величиной  $n$ :

$$s = \deg(x) + \deg(y) < n.$$

Положим для определенности  $i := \deg(x) \leq \deg(y)$ . В силу последнего неравенства,  $\deg(y) < n - i$ . Кроме того, из этого же неравенства следует, что  $i < n/2$ , а значит, и  $\deg(x) < n - i$ .

Мы выбрали несмежную пару вершин с наибольшей суммой  $s$  степеней вершин. Поэтому любая несмежная с  $y$  вершина имеет степень, меньшую или равную  $\deg(x) = i$ . Так как  $\deg(y) \leq n - 1 - i$ , то в графе  $C(G)$  гарантированно имеется  $i$  несмежных с  $y$  вершин, то есть вершин, степени которых меньше или равны  $i$ .

Далее, любая несмежная с  $x$  вершина имеет степень, меньшую или равную  $\deg(y) < (n - i)$ . Так как степень  $x$  равна  $i$ , то в графе существует  $n - 1 - i$  несмежных с  $x$  вершин, степень которых меньше  $n - i$ . Кроме того, сама вершина  $x$  имеет степень, меньшую  $(n - i)$ . Таким образом, мы нашли по меньшей мере  $n - i$  вершин в графе  $C(G)$ , степень которых меньше  $(n - i)$ .

Теперь заметим, что  $G$  есть остовный подграф графа  $C(G)$ . Поэтому если в  $C(G)$  какая-то вершина имеет степень, меньшую некоторого числа, то и в  $G$  степень этой вершины не превосходит того же числа. Следовательно, мы нашли такое  $i < n/2$ , для которого в графе  $G$  нашлись как минимум  $i$  вершин степени, меньшей или равной  $i$ , и  $n - i$  вершин, степень которых меньше  $n - i$ , а это противоречит условиям (10). Действительно, последовательность  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$  степеней вершин упорядочена у нас по неубыванию. Значит, первые  $i$  этих чисел меньше или равны  $i$ , а значит и  $i$ -е число этой последовательности, а именно,  $d_i$ , меньше или равно  $i$ . Аналогично показывается, что  $d_{n-i} < n - i$ .  $\square$

**3.3.** В заключение данного параграфа поговорим о гамильтоновых циклах в орграфах.

**3.3.1.** Оказывается, что любое обобщение описанных выше достаточных условий существования гамильтоновых путей и циклов в неориентированных графах на ориентированный случай дается довольно тяжело. В частности, существует следующее обобщение теоремы Дирака на случай орграфов.

**Теорема 3.13.** *Пусть  $D$  есть сильно связный орграф, исходящая и входящая степени любой вершины  $x$  в котором больше или равна  $n/2$ . Тогда в  $D$  существует гамильтонов цикл.*

Доказательство этой теоремы значительно сложнее доказательства теоремы Дирака для неориентированных графов и здесь приводиться не будет.

**3.3.2.** Вместо этого мы рассмотрим частный случай орграфов — турниры, для которых вопрос существования гамильтонова пути или цикла решается значительно проще.

**Теорема 3.14 (Redei, 1934).** *В любом турнире  $T$  существует ориентированный гамильтонов путь.*

Доказательство проведем индукцией по количеству  $n$  вершин в турнире  $D$ . Очевидно, что тривиальный гамильтонов путь, состоящий из одной вершины, существует в тривиальном же турнире, построенном на одной вершине. Предположим теперь, что при любом фиксированном  $n \geq 2$  любой турнир, построенный на  $(n - 1)$ -й вершине, имеет гамильтонов путь. Рассмотрим тогда в турнире  $T$ , построенном на  $n$  вершинах, произвольную вершину  $x$ . Орграф  $T' = T - x$  является турниром на  $(n - 1)$ -й вершине, так что в нем существует гамильтонов путь  $P' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ . В этом случае возможно всего три варианта.

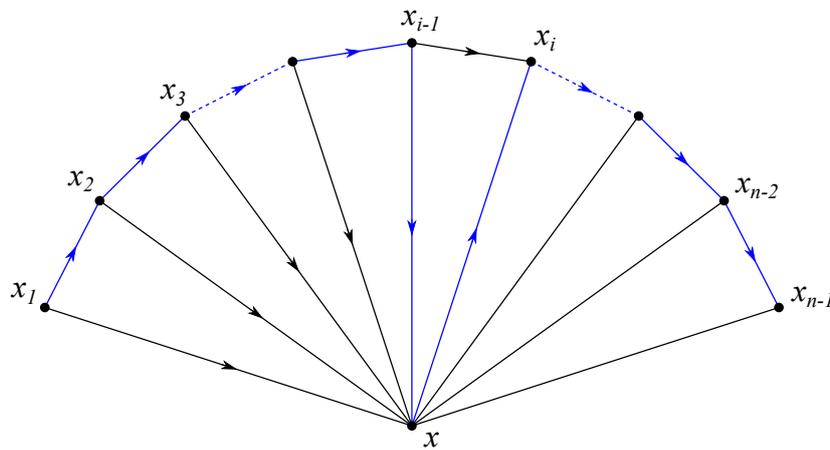


Рис. 19

1. В орграфе  $T$  существует ребро  $(x, x_1)$ . Тогда в  $T$  существует и ориентированный гамильтонов путь  $(x, x_1, \dots, x_{n-1})$ .
2. В орграфе  $T$  существует ребро  $(x_1, x)$ , и кроме того, в  $T$  существует ребро  $(x, x_i)$  для некоторого  $i > 1, i < n$  (см. вершину  $x_i$  на рис.19). Тогда в  $T$  имеется гамильтонов путь, а именно, путь

$$(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_i, \dots, x_{n-1})$$

(синие ребра на рисунке).

3. Наконец, в орграфе  $T$  не существует ребра  $(x, x_i)$  ни для какого  $i = 1, \dots, n - 1$ . Но тогда в  $T$  существует ребро  $(x_{n-1}, x)$ , а значит, и гамильтонов путь  $(x_1, \dots, x_{n-1}, x)$ .

Теорема доказана.

## 4 Линейное пространство ребер. Циклы и разрезы

**4.1.** Перейдем к изучению еще одного важного понятия, тесно связанного как с остовными деревьями, так и с четными подграфами графа  $G$  — понятия фундаментального цикла.

**4.1.1.** Пусть  $T$  есть некоторое остовное дерево связного графа  $G$ . Ребра графа  $G$ , не вошедшие в  $T$ , образуют, как говорят, *кодерево*  $\bar{T}$  графа  $G$ . Кодерево  $\bar{T}$  можно еще трактовать как остовный подграф, полученный из  $G$  удалением всех ребер, принадлежащих остовному дереву  $T$ . Ребра дерева  $T$  называют иногда ветвями (branches) этого дерева, а ребра кодерева  $\bar{T}$  называют хордами исходного дерева  $T$ .

Рассмотрим произвольное ребро  $e = \{x, y\}$ , принадлежащее кодереву  $\bar{T}$ . Согласно доказанному в предыдущей главе утверждению, граф  $T + e$ , полученный добавлением к  $T$  ребра  $e$ , содержит единственный цикл. Этот цикл обозначается обычно  $C_e$  и называется *фундаментальным циклом* графа  $G$  по отношению к остовному дереву  $T$ .

**4.1.2.** Рассмотрим теперь все множество ребер из  $\bar{T}$ . Каждому из этих ребер  $e$  соответствует свой фундаментальный цикл  $C_e$ , полученный добавлением  $e$  к  $T$ . Множество всех таких циклов образует, как говорят, *фундаментальное множество циклов*, ассоциированное с  $T$ . Количество же циклов в этом множестве, совпадающее с количеством ребер в  $\bar{T}$ , называется *цикловым рангом*  $\gamma(G)$  графа  $G$ . Понятно, что для любого связного графа  $G$  цикловой ранг  $\gamma(G)$  не зависит от выбора остовного дерева  $T$  в графе и равен  $m - n + 1$ , где  $m$  — количество ребер в графе  $G$ .

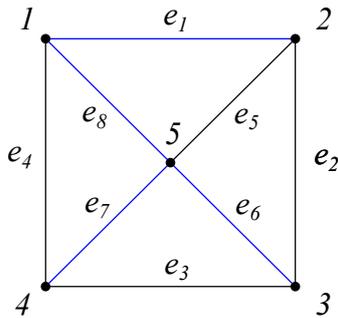


Рис. 20: Остовное дерево графа

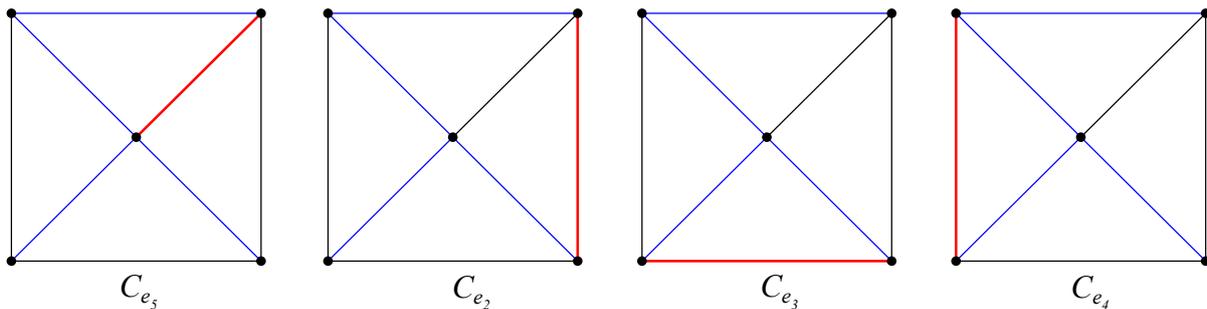


Рис. 21: Фундаментальные циклы графа

В качестве примера рассмотрим граф  $G$ , показанный на рис.20. Ребра остовного дерева  $T$  на этом рисунке помечены синим цветом. У такого графа имеется четыре ребра  $e_i, i = 2, \dots, 5$ , входящие в кодерево  $\bar{T}$ . Как следствие, цикловой ранг  $\gamma(G)$  данного графа равен четырем. Соответствующие каждому из ребер  $e_i \in \bar{T}$  фундаментальные циклы  $C_{e_i}$  показаны на рис.21.

**4.2.** Важно заметить, что по построению порождающее цикл  $C_{e_i}$  ребро  $e_i$  не входит ни в какие другие фундаментальные циклы графа  $G$ , порожденные остальными ребрами  $e_j \in \bar{T}$ . Это свойство позволяет рассматривать множество фундаментальных циклов как базис в линейном

подпространстве некоторого линейного пространства ребер, к описанию которого мы сейчас и перейдем.

**4.2.1.** Рассмотрим простой связный граф  $G$ , построенный на  $n$  вершинах и имеющий  $m$  ребер. Введем множество  $\mathcal{E}(G)$  всех подмножеств множества  $E(G)$  ребер графа  $G$ . Любое подмножество  $S \in \mathcal{E}$  ребер графа  $G$  индуцирует некоторый остовный подграф  $G(S)$  графа  $G$ , и далее в этом параграфе, говоря о некотором подмножестве  $S$  ребер, мы также будем иметь в виду и связанный с  $S$  индуцированный им остовный подграф  $G(S)$ .

В первой главе мы отмечали, что на множестве всех остовных подграфов (или, что в данном случае то же самое, на множестве  $\mathcal{E}$ ) корректно определена операция  $\Delta$  симметрической разности двух остовных подграфов. Несложно убедиться в том, что данная операция вводит на множестве  $\mathcal{E}$  структуру линейного пространства над двухэлементным полем  $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ . Нулевым элементом в этом пространстве является пустое подмножество ребер  $\emptyset$ . Кроме того, так как  $S \Delta S = \emptyset$  для любого подмножества  $S$  ребер (то есть элемента множества  $\mathcal{E}(G)$ ), то обратный элемент  $-S$  к  $S$  в этом пространстве совпадает с  $S$ . Умножение  $S \in \mathcal{E}$  на 1 в этом пространстве дает нам сам элемент  $S$ , а умножение на 0 — пустой подграф, то есть остовный подграф, индуцированный пустым подмножеством ребер  $\emptyset$ . Так как набор подмножеств  $E_i$ , каждое из которых состоит из единственного ребра  $e_i \in E(G)$ , образует в этом пространстве базис (так называемый стандартный базис пространства  $\mathcal{E}$ ), то размерность этого пространства равна  $m$ .

Любой элемент  $S \in \mathcal{E}$  в стандартном базисе можно представить в виде бинарной строки длины  $m$ . В случае, если ребро  $e_i \in S$ , на  $i$ -й позиции этой строки стоит единица. В противном случае там стоит ноль. Например, множество ребер остовного дерева  $T$ , показанного на рис.20, описывается вектором

$$(1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1).$$

Стандартная операция  $\otimes$  “исключающее или” (exclusive-or, или хог) задает бинарную операцию на множестве таких строк, эквивалентную операции симметрической разности  $\Delta$  на множестве  $\mathcal{E}(G)$  подмножеств множества ребер графа  $G$ . Операция  $\otimes$  превращает множество бинарных строк длины  $m$  в линейное пространство над полем  $\mathbb{F}_2$ , изоморфное пространству  $\mathcal{E}$ . Как следствие, часто вместо элементов  $\mathcal{E}$  мы будем рассматривать соответствующие бинарные строки длины  $m$ , а вместо операции  $\Delta$  симметрической разности — операцию  $\otimes$  над этими строками.

**4.2.2.** В линейном пространстве  $\mathcal{E}$  можно ввести скалярное произведение: по определению, скалярным произведением его элементов  $S$  и  $Q$  называется элемент поля  $\mathbb{F}_2$ , рассчитывающийся по формуле

$$(S, Q) := s_1q_1 + \dots + s_mq_m \in \mathbb{F}_2,$$

где  $s_i \in \{0, 1\}$  и  $q_i \in \{0, 1\}$  есть коэффициенты в разложении подмножеств  $S$  и  $Q$  по стандартному базису. Из этого определения видно, что два элемента  $S$  и  $Q$  ортогональны друг другу тогда и только тогда, когда они пересекаются по четному числу ребер.

**4.2.3.** Давайте теперь введем достаточно важное понятие декомпозиции графа  $G$ .

**Определение 4.1.** Декомпозицией графа  $G$  называется семейство  $\mathcal{H}$  попарно реберно непересекающихся подграфов  $H_1, \dots, H_k$  графа  $G$ , объединение которых дает весь граф  $G$ :

$$\bigcup_{1 \leq i \leq k} H_i = G.$$

Сразу заметим, что в любом графе  $G$  всегда существует так называемая тривиальная декомпозиция, у которой любое подмножество  $H_i$  состоит из одиночного ребра  $e_i \in E(G)$ . В реальных же задачах нас, как правило, интересуют более содержательные случаи декомпозиции графа  $G$ . На рис.22 показаны некоторые примеры таких нетривиальных декомпозиций. Рисунки 22,а и 22,б иллюстрируют примеры так называемых декомпозиций графа на пути (path decomposition) — декомпозиций, в которых все  $H_i$  изоморфны некоторым путям  $P_i$ . На рис.22,с показан пример так называемой декомпозиции графа на циклы (cycle decomposition) — декомпозиции, в которые все  $H_i$  изоморфны циклам.

**Определение 4.2.** Если каждый из подграфов  $H_i$  изоморфен одному и тому же подграфу  $H$ , то такая декомпозиция называется  $H$ -декомпозицией графа  $G$ .

Декомпозиции, показанные на рис.22,а-с, отвечают  $P_2$ ,  $P_3$  и  $C_5$ -декомпозициям графов  $K_4$  и  $K_5$ .

**Определение 4.3.** Если каждый из подграфов  $H_i$  представляет собой гамильтонов цикл в графе  $G$ , то такая декомпозиция графа  $G$  называется гамильтоновой.

На рис.22,с представлена гамильтонова декомпозиция графа  $K_5$ .

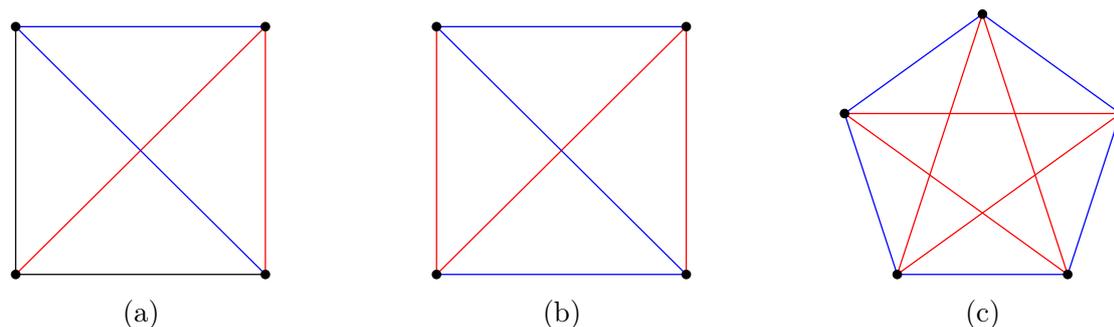


Рис. 22: Декомпозиция графа  $K_4$

**4.2.4.** В данном параграфе нас будет особо интересовать декомпозиция графа на циклы (рис. 22,с). Сразу заметим, что такого рода декомпозиция существует далеко не всегда — любое дерево  $T$  представляет тривиальный пример графа, для которого декомпозиция на циклы отсутствует (смотри также рисунки 22,а и 22,б).

Предположим, что граф  $G$  все же допускает декомпозицию на циклы. В этом случае степень любой вершины  $x \in V(G)$  графа  $G$  четна. Действительно, эта степень представляет собой удвоенное количество циклов, проходящих через вершину  $x$ . Иными словами, мы показали, что любой граф, допускающий декомпозицию на циклы, является *четным* графом. Оказывается, верно и обратное утверждение.

**Теорема 4.4** (Veblen, 1912). *Граф  $G$  допускает декомпозицию на циклы тогда и только тогда, когда  $G$  четный.*

**Доказательство.** Нам осталось доказать, что любой четный граф допускает декомпозицию на циклы. Будем доказывать это утверждение индукцией по количеству ребер. В случае пустого графа это утверждение верно — мы  $G$  можем разложить на пустое множество циклов. Пусть теперь  $G$  является непустым четным графом. Рассмотрим в нем подграф  $H$ , индуцированный вершинами графа  $G$  с положительными четными степенями. Так как степень любой вершины

этого подграфа больше или равна двум, то такой подграф содержит цикл  $C$  (войдя в любую вершину, мы всегда сможем из нее выйти; так как вершин конечное число, то мы когда-нибудь вернемся в одну из пройденных вершин, получив тем самым цикл). Рассмотрим тогда в графе  $G$  остовный подграф  $G' := G \setminus E(C)$ , полученный удалением ребер цикла  $C$ . Этот подграф имеет меньшее количество ребер, а потому допускает разложение на циклы. Но тогда и граф  $G$  допускает разложение на те же циклы плюс цикл  $C$ .  $\square$

**Замечание 4.5.** В случае связного графа  $G$  теорему Веблена можно переформулировать так: граф  $G$  представляет собой объединение реберно непересекающихся простых циклов тогда и только тогда, когда он эйлеров.

**4.2.5.** Вернемся к пространству  $\mathcal{E}$  и рассмотрим в этом пространстве подмножество всех четных подграфов заданного графа  $G$ .

**Утверждение 4.6.** *Симметрическая разность двух четных подграфов  $H_1$  и  $H_2$  есть снова четный подграф.*

**Доказательство.** Предположим вначале, что подграфы  $H_1$  и  $H_2$  не имеют общих вершин. В этом случае их симметрическая разность представляет собой несвязное объединение  $H_1 \cup H_2$  этих подграфов, то есть четный подграф. В противном случае рассмотрим произвольную общую вершину  $x$  четных подграфов  $H_1$  и  $H_2$ . Обозначим через  $S_1$  подмножество инцидентных  $x$  ребер, принадлежащих  $H_1$ , а через  $S_2$  — подмножество ребер, принадлежащих  $H_2$ . Симметрическая разность  $S_1 \Delta S_2$  представляет собой объединение двух блоков — подмножества  $B_1 = S_1 \setminus (S_1 \cap S_2)$  ребер, принадлежащих  $H_1$  и не принадлежащих  $H_2$ , а также подмножества  $B_2 = S_2 \setminus (S_1 \cap S_2)$  ребер, принадлежащих  $H_2$  и не принадлежащих  $H_1$ . Как следствие,

$$|S_1 \Delta S_2| = |S_1 \setminus (S_1 \cap S_2)| + |S_2 \setminus (S_1 \cap S_2)| = |S_1| + |S_2| - 2|S_1 \cap S_2|.$$

Так как  $|S_1|$  и  $|S_2|$  четны, то четным является и число  $|S_1 \Delta S_2|$ . Иными словами, все вершины остовного подграфа, полученного в результате симметрической разности двух четных подграфов  $H_1$  и  $H_2$ , имеют четную степень, а следовательно, подграф  $H = H_1 \Delta H_2$  является четным подграфом.  $\square$

**Следствие 4.7.** *Множество четных подграфов замкнуто относительно операции  $\Delta$ , то есть образует в  $\mathcal{E}$  линейное подпространство  $\mathcal{C}$ .*

Учитывая теорему Веблена, мы можем сказать, что это линейное подпространство порождается всеми циклами графа  $G$ . Как следствие, подпространство  $\mathcal{C}$  называется *пространством циклов* графа  $G$ .

**4.2.6.** Ранее мы сказали, что любой фундаментальный цикл  $C_{e_i}$ , связанный с некоторым остовным деревом  $T$  графа  $G$ , содержит ребро  $e_i$  (хорду дерева  $T$ ), не входящее ни в какой другой фундаментальный цикл. С точки зрения линейной алгебры это означает, что такие циклы являются линейно независимыми. Действительно, линейная комбинация

$$\alpha \cdot (0, 1, \dots, \underbrace{1}_i, \dots, \underbrace{0}_j, \dots, 0) + \beta \cdot (1, 1, \dots, \underbrace{0}_i, \dots, \underbrace{1}_j, \dots, 0) = (0, 0, \dots, \underbrace{0}_i, \dots, \underbrace{0}_j, \dots, 0)$$

любых двух циклов равна пустому циклу (нулевому вектору) тогда и только тогда, когда коэффициенты  $\alpha = \beta = 0$ . Аналогичные рассуждения верны и для всего набора из  $m - n + 1$  фундаментальных циклов. Следовательно, мы имеем  $m - n + 1$  линейно независимый вектор

в пространстве  $\mathcal{C}$  циклов графа  $G$ . Нам хочется показать, что набор таких векторов образует базис пространства  $\mathcal{C}$ . Для этого нужно доказать, что любой элемент  $C$  пространства  $\mathcal{C}$  может быть представлен в виде линейной комбинации фундаментальных циклов  $C_{e_i}$ .

Обозначим через  $e_1, \dots, e_k$  ребра  $C$ , не принадлежащие остовному дереву  $T$ . Пусть  $C_{e_i}$  есть соответствующие этим ребрам фундаментальные циклы. Покажем, что цикл  $C$  представляется в виде линейной комбинации циклов  $C_{e_i}$ :

$$C = C_{e_1} \Delta \dots \Delta C_{e_k} \iff \tilde{C} := C \Delta C_{e_1} \Delta \dots \Delta C_{e_k} = 0.$$

Для этого заметим, что в цикле  $\tilde{C}$  ребро  $e_i$  быть уже не может — единственному ребру  $e_i$  в  $C$  отвечает единственное же ребро  $e_i$  в наборе  $C_{e_1}, \dots, C_{e_k}$ , принадлежащее  $C_{e_i}$ . Следовательно, все ребра  $\tilde{C}$  принадлежат  $T$ , то есть в  $\tilde{C}$  циклы отсутствуют. Но в  $\mathcal{C}$  единственным элементом, в котором циклы отсутствуют, является пустой подграф  $0$ , так что  $\tilde{C} = 0$ . Тем самым мы и доказали, что набор фундаментальных циклов образует базис подпространства  $\mathcal{C}$ .

Кроме того, отсюда следует, что размерность подпространства  $\mathcal{C}$  равна  $n - m + 1$ . Несложно убедиться в том, что в случае несвязного графа  $G$ , имеющего  $k$  компонент, эта размерность равна  $n - m + k$ .

**4.3.** Наряду с  $\mathcal{C}$  в пространстве  $\mathcal{E}$  имеется и еще одно очень важное подпространство, тесно связанное с  $\mathcal{C}$  — так называемое пространство  $\mathcal{B}$  разрезов графа  $G$ . Для определения этого подпространства нам понадобятся несколько важных понятий.

**4.3.1.** Начнем с понятия реберно разделяющего множества  $F$ .

**Определение 4.8.** Подмножество  $F \subset E(G)$  называется *реберно разделяющим множеством* связного графа  $G$ , если после удаления всех ребер из  $F$  граф  $G - F$  перестает быть связным.

Рассмотрим в качестве примера граф, показанный на рис.23. Синим цветом на каждом из этих рисунков помечены ребра, после удаления которых граф перестает быть связным. Следовательно, любое из таких подмножеств ребер образует реберно разделяющее множество.

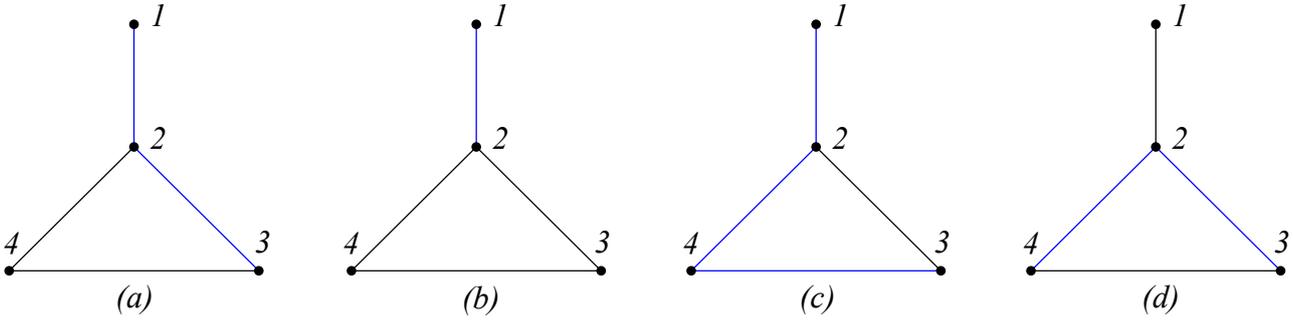


Рис. 23

**4.3.2.** Следующее важное для нас понятие — это понятие *реберного разреза* (edge cut). Пусть у нас имеются два подмножества  $S_1$  и  $S_2$  множества  $V(G)$  вершин графа  $G$  (не обязательно непересекающихся). Рассмотрим все ребра графа  $G$ , один из концов которых принадлежит  $S_1$ , а второй —  $S_2$ . Множество таких ребер обозначается обычно через  $[S_1, S_2]$ . Случаю  $S_1 = S_2 = S$  отвечает набор ребер, оба конца которых лежат в  $S$ . Нас же сейчас будет интересовать противоположный случай, а именно, случай, когда  $S_2 = V(G) \setminus S_1$ , то есть когда у нас имеется разбиение множества  $V(G)$  вершин на два блока —  $S_1$  и  $S_2$ .

**Определение 4.9.** Пусть  $S$  есть некоторое подмножество множества вершин  $V(G)$  графа, а  $\bar{S} = V(G) \setminus S$ . Набор ребер  $[S, \bar{S}]$  называется реберным разрезом графа  $G$ , связанным с подмножеством  $S$ . Иногда он также называется кограницей  $S$  и обозначается через  $\partial(S)$ .

Очевидно, что  $\partial(S) = \partial(\bar{S})$ , а также то, что  $\partial(V(G)) = \emptyset$ . В случае мультиграфа без петель реберный разрез  $\partial(x)$ , связанный с отдельной вершиной  $x$ , является, как говорят, тривиальным реберным разрезом и представляет собой набор ребер, инцидентных  $x$ , так что  $|\partial(x)| = \deg(x)$ . По аналогии с этим частным случаем размер  $|\partial(S)|$  подмножества ребер  $\partial(S)$  в случае мультиграфа без петель называется *степенью* подмножества вершин  $S$ .

Так как в графе  $G - [S, \bar{S}]$  пути между  $S$  и  $\bar{S}$  отсутствуют, то любой непустой реберный разрез  $[S, \bar{S}]$  является реберно-разделяющим множеством. Обратное, конечно же, неверно. Так, реберно-разделяющее множество, показанное синим цветом на рис.23,а, реберным разрезом не является — наряду с ребром  $\{1, 2\}$  оно содержит лишнее ребро  $\{2, 3\}$ . Все остальные реберно-разделяющие множества, показанные на рис.23,б, с и д, являются одновременно и реберными разрезами. Так, на рис.23,б представлен реберный разрез  $\partial(1)$ , связанный с вершиной 1, на рис.23,с — реберный разрез  $\partial(1, 4)$  подмножества вершин  $\{1, 4\}$ , а на рис.23,д — реберный разрез  $\partial(1, 2)$ , связанный с подмножеством  $\{1, 2\}$  множества вершин.

**4.3.3.** Наконец, введем последнее нужное нам в этом месте понятие — понятие *минимального реберного разреза* (bond).

**Определение 4.10.** Реберный разрез называется минимальным (bond), если он представляет собой непустой реберный разрез, любое собственное подмножество которого не является реберным разрезом.

Среди показанных на рис.23 реберных разрезов только два являются минимальными — реберные разрезы  $\partial(1)$  (рис.23,б) и  $\partial(1, 2)$  (рис.23,д). Реберный разрез  $\partial(1, 4)$ , показанный на рис.23,с, минимальным не является — он содержит в качестве своего собственного подмножества ребро  $\{1, 2\}$ , являющееся реберным разрезом, связанным с вершиной 1.

**4.3.4.** Докажем теперь для связного графа  $G$  следующий важный критерий минимальности реберного разреза.

**Теорема 4.11.** В любом связном графе  $G$  любой непустой реберный разрез  $\partial(S)$  является минимальным тогда и только тогда, когда граф  $G - \partial(S)$  имеет в точности две связные компоненты.

**Доказательство.** Предположим вначале, что граф  $G - \partial(S)$  имеет в точности две компоненты связности  $G_1$  и  $G_2$ . Реберный разрез  $F := \partial(S)$ , по определению, содержит те и только те ребра, которые соединяют в графе  $G$  эти две компоненты. Поэтому, если у  $F$  существует собственное подмножество  $F'$ , то граф  $G - F'$  содержит в качестве подграфов те же самые две компоненты связности  $G_1$  и  $G_2$  графа  $G - F$  плюс по крайней мере одно ребро, соединяющее эти компоненты. Следовательно, граф  $G - F'$  является связным, а это и означает, что  $\partial(S)$  представляет собой минимальный реберный разрез.

Обратно, предположим, что граф  $G - \partial(S)$  содержит более чем две связные компоненты. Это означает, что либо подграф  $H$ , индуцированный подмножеством вершин  $S$ , либо подграф  $\bar{H}$ , индуцированный подмножеством вершин  $\bar{S}$ , содержит по крайней мере две связные компоненты. Пусть, для определенности, таковым является подграф  $H$ . В этом случае  $S = A \cup B$ , причем

между вершинами подмножеств  $A$  и  $B$  ребра отсутствуют. Но тогда, например,  $[A, \bar{A}]$  есть собственное подмножество множества  $\partial(S)$ , являющееся реберным разрезом, а это противоречит минимальности  $\partial(S)$ .  $\square$

**4.3.5.** Аналогом теоремы Веблена для реберных разрезов является следующее

**Утверждение 4.12.** *Любой реберный разрез  $[S, \bar{S}]$  в связном графе  $G$  есть объединение нескольких попарно реберно непересекающихся минимальных реберных разрезов.*

Доказательство этого утверждения предлагается провести самостоятельно (упражнение ??).

**4.3.6.** Докажем, наконец, следующее важное утверждение.

**Утверждение 4.13.** *Симметрическая разность двух различных реберных разрезов есть снова реберный разрез, причем*

$$\partial(X) \Delta \partial(Y) = \partial(X \Delta Y). \tag{11}$$

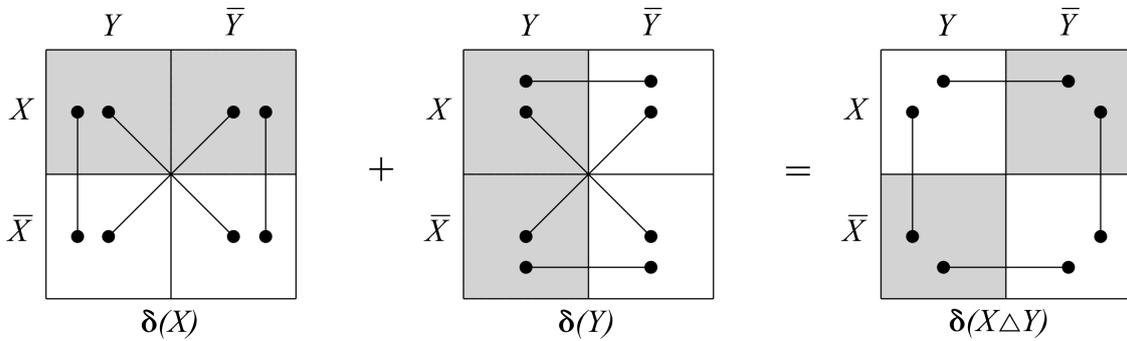


Рис. 24

Доказательство. То, что симметрическая разность двух различных реберных разрезов есть снова реберный разрез, следует из формулы (11). Для ее доказательства рассмотрим рис.24. Все варианты разбиения множества  $V(G)$  с помощью двух подмножеств имеют следующий вид:

$$X \cap Y, \quad X \setminus Y, \quad Y \setminus X, \quad \bar{X} \cap \bar{Y}.$$

Все эти варианты можно наглядно представить в виде следующей таблицы:

|           |                 |                        |
|-----------|-----------------|------------------------|
|           | $Y$             | $\bar{Y}$              |
| $X$       | $X \cap Y$      | $X \setminus Y$        |
| $\bar{X}$ | $Y \setminus X$ | $\bar{X} \cap \bar{Y}$ |

Правые нижние четыре клетки этой таблицы образуют разбиение квадрата на четыре части, как раз и описывающие все четыре блока разбиения множества  $V(G)$  вершин графа  $G$ .

Теперь рассмотрим набор ребер  $\partial(X)$ . Эти ребра могут исходить либо из  $X \cap Y$ , либо из  $X \setminus Y$ , и входить в любые две клетки нижней части описанного выше квадрата. В итоге получается четыре типа ребер (см.рис.24). Аналогично, ребра из набора  $\partial Y$  могут выходить из левых клеток квадрата в любую из правых ее клеток. В итоге вновь получаем четыре варианта. Теперь осталось образовать из этих наборов ребер симметрическую разность. Видно, что в нее не будут входить те ребра, которые соединяют диагональные клетки квадрата. Но это и есть  $\partial(X \Delta Y)$  — множеству вершин  $X \Delta Y$  отвечают правый верхний и левый нижний блоки разбиения  $V(G)$ , а ребра из  $\partial(X \Delta Y)$  соединяют их с двумя оставшимися блоками разбиения  $V(G)$ .  $\square$

**Следствие 4.14.** Множество всех реберных разрезов вместе с операцией  $\Delta$  образует в линейном пространстве  $\mathcal{E}$  всех подмножеств множества  $E(G)$  ребер графа  $G$  линейное подпространство  $\mathcal{B}$ , называемое линейным пространством реберных разрезов графа  $G$ .

**4.4.** Напомним, что в начале этого параграфа мы ввели важное понятие фундаментального множества циклов графа  $G$ . С этим понятием тесно связано не менее важное понятие фундаментального множества разрезов в графе  $G$ .

**4.4.1.** Пусть  $T$  есть произвольное остовное дерево связного графа  $G$ . Удаление любого ребра  $e$  этого дерева разбивает все множество вершин дерева  $T$  на два блока  $X$  и  $Y$ . Рассмотрим тогда минимальный реберный разрез  $\partial(X) =: \partial_e$ , связывающий в исходном графе  $G$  вершины из блоков  $X$  и  $Y$ . Такой реберный разрез называется *фундаментальным разрезом*, связанным с деревом  $T$ , а множество всех таких разрезов — *фундаментальным множеством разрезов*, связанным с деревом  $T$ .

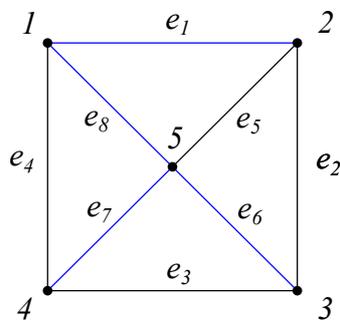


Рис. 25: Остовное дерево графа

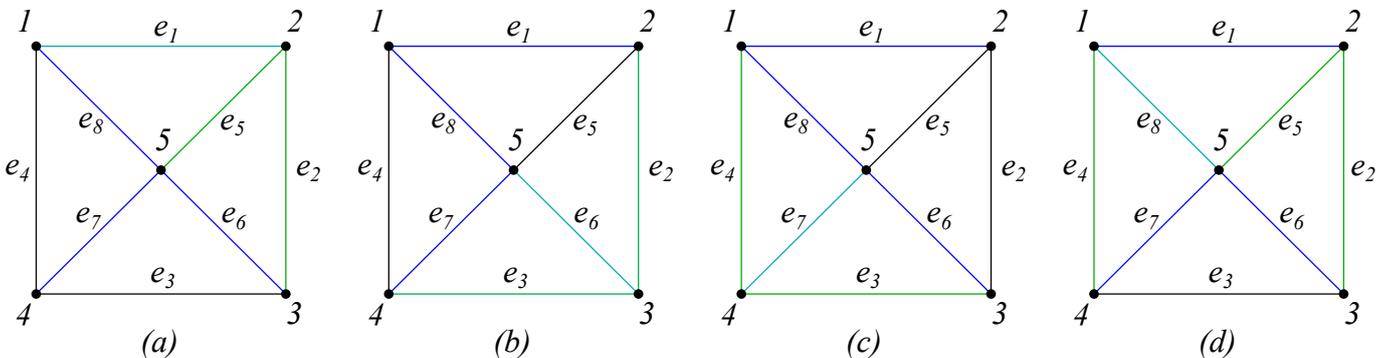


Рис. 26: Фундаментальные разрезы графа

**4.4.2.** В качестве примера рассмотрим граф  $G$ , показанный на рис.25. Остовное дерево  $T$  этого графа состоит из ребер  $e_1, e_6, e_7$  и  $e_8$  (синие ребра на рисунке). Удаляя ребро  $e_1$ , мы разобьем множество вершин дерева  $T$  на два блока — блок, состоящий из единственной вершины 2, а также блок, состоящий из вершин  $\{1, 3, 4, 5\}$ . Соответствующий этому разбиению реберный разрез  $\partial(2) = \partial_{e_1}$  состоит из ребер  $e_1, e_2, e_5$  (ребра, помеченные зеленым цветом на рис.26,a). Реберный разрез  $\partial_{e_6}$ , отвечающий ребру  $e_6$  остовного дерева, равен  $\partial(3) = \{e_2, e_3, e_6\}$  (рис.26,b), а реберный разрез  $\partial_{e_7}$ , соответствующий ребру  $e_7$  дерева  $T$ , есть  $\partial(4) = \{e_3, e_4, e_7\}$  (рис.26,c). Наконец, ребру  $e_8$  отвечает реберный разрез  $\partial_{e_8} = \partial(1, 2) = \{e_2, e_4, e_5, e_8\}$  (рис.26,d).

Важно заметить, что любой фундаментальный реберный разрез состоит из ребра  $e_i$  остовного дерева, которое порождает этот разрез, а также еще из каких-то ребер, которые соединяют  $X$

и  $Y$  в графе  $G$ , но не соединяют их в остовном дереве  $T$ . Иными словами, все остальные ребра этого разреза дереву  $T$  не принадлежат, то есть все они принадлежат кодереву  $\bar{T}$ .

Как следствие, ребро  $e_i$  остовного дерева  $T$ , порождающее соответствующий разрез  $\partial_{e_i}$ , по построению входит только в этот фундаментальный разрез и не входит ни в какой другой фундаментальный разрез, связанный с другими ребрами  $e_j$  остовного дерева  $T$ . На языке пространства  $\mathcal{B}$  реберных разрезов это означает, что такие разрезы образуют набор линейно независимых векторов этого пространства. Количество этих линейно независимых векторов совпадает с количеством ребер в остовном дереве связного графа  $G$  и равно  $n - 1$ .

**4.4.3.** Как и в случае фундаментальных циклов, легко доказать, что любой реберный разрез графа может быть представлен в виде линейной комбинации некоторых фундаментальных разрезов  $\partial_{e_i}$ , то есть что набор фундаментальных разрезов графа  $G$  образует базис пространства  $\mathcal{B}$  (см. упражнение ??). Отсюда, в частности, следует, что размерность данного подпространства равна  $n - 1$ , а количество всех реберных разрезов связного графа  $G$  равно  $2^{n-1}$ . В случае несвязного графа  $G$ , содержащего  $k$  компонент, размерность  $\mathcal{B}$  равна  $n - k$ .

**4.5.** Давайте теперь поймем, как связаны между собой пространство  $\mathcal{C}$  циклов и пространство  $\mathcal{B}$  разрезов.

**4.5.1.** Заметим, что в частном случае графа  $G = C_n$  любой четный набор ребер представляет собой реберный разрез, тогда как нечетный набор ребер таковым не является. Оказывается, что данный факт справедлив и в общем случае — подмножество  $F \subset E(G)$  представляет собой реберный разрез  $[S, \bar{S}]$  тогда и только тогда, когда  $F$  содержит четное количество ребер из любого цикла  $C$  в графе  $G$ . Более того, справедливо следующее чуть более общее

**Утверждение 4.15.** *Остовный подграф  $C$  графа  $G$  принадлежит пространству  $\mathcal{C}$  циклов тогда и только тогда, когда у него имеется четное число общих ребер с любым элементом  $B$  пространства  $\mathcal{B}$  разрезов. Обратное, остовный подграф  $B$  принадлежит  $\mathcal{B}$  тогда и только тогда, когда он пересекается с любым элементом  $C \in \mathcal{C}$  по четному количеству ребер.*

**Доказательство.** Заметим, прежде всего, что любой цикл  $C$  графа  $G$  пересекается с любым минимальным реберным разрезом  $\partial(X)$  по четному числу ребер. Действительно, зафиксируем произвольную вершину  $x$  цикла  $C$  и предположим для определенности, что  $x \in X$ . Выйдя по циклу из подмножества  $X$ , мы вернуться в него (а следовательно, и вернуться в вершину  $x$ ) можем только за четное количество шагов. При этом, делая каждый такой шаг, мы проходим по некоторому ребру минимального реберного разреза  $\partial(X)$ . Следовательно,  $|E(C) \cap \partial(X)|$  есть четное число. Но любой элемент  $\mathcal{C}$  есть объединение попарно реберно непересекающихся циклов (теорема Веблена), а любой элемент  $\mathcal{B}$  — объединение попарно непересекающихся минимальных реберных разрезов (утверждение 4.12), так что необходимость данного условия доказана.

При доказательстве достаточности будем считать граф  $G$  связным — в противном случае нам достаточно разобрать отдельно каждую из связных компонент. Пусть некоторый остовный подграф  $C$  имеет четное число общих ребер с любым элементом  $B$  из  $\mathcal{B}$ . Предположим, что при этом он не принадлежит  $\mathcal{C}$ . Обозначим через  $e_1, \dots, e_k$  ребра  $C$ , не принадлежащие остовному дереву  $T(G)$  графа  $G$ , и рассмотрим остовный подграф

$$\tilde{C} = C_{e_1} \Delta \dots \Delta C_{e_k},$$

где  $C_{e_i}$  — фундаментальный цикл  $C$ , отвечающий ребру  $e_i$ . Тогда, как мы уже знаем, симметрическая разность  $C \Delta \tilde{C}$  не содержит ребер, принадлежащих кодереву  $\bar{T}$ .

Пусть  $e$  есть ребро  $T$ , принадлежащее подграфу  $C \triangle \tilde{C}$ . Рассмотрим порожденный ребром  $e$  фундаментальный разрез  $\partial_e$ . Так как все остальные ребра  $\partial_e$  принадлежат  $\tilde{T}$ , то  $\partial_e$  пересекается с  $C \triangle \tilde{C}$  по единственному ребру  $e$ . Но  $\tilde{C}$  представляет собой элемент  $\mathcal{C}$ , а следовательно, пересекается с любым реберным разрезом по четному числу ребер. Кроме того, согласно выбору  $C$ , этот подграф также обладает этим условием. Как следствие,  $C \triangle \tilde{C}$  также должен с любым разрезом пересекаться по четному числу ребер (см. упражнение ??). С разрезом же  $\partial_e$  он пересекается только по одному ребру  $e$ . Полученное противоречие доказывает наше утверждение, касающееся циклов. Аналогично доказывается, что и любой подграф, пересекающийся с любым элементом из  $\mathcal{C}$  по четному числу ребер, принадлежит подпространству  $\mathcal{B}$ .  $\square$

**4.5.2.** Из доказанного выше утверждения 4.15 вытекает очень важное

**Следствие 4.16.** *Пространство циклов  $\mathcal{C}$  и пространство реберных разрезов  $\mathcal{B}$  ортогональны друг другу.*

Отметим также, что из анализа размерностей этих двух пространств мы имеем равенство

$$|\mathcal{B}| + |\mathcal{C}| = (n - k) + (m - n + k) = m = |\mathcal{E}|. \quad (12)$$

**Замечание 4.17.** Казалось бы, утверждения 4.16 и равенства (12) достаточно для того, чтобы утверждать, что пространства  $\mathcal{C}$  и  $\mathcal{B}$  являются ортогональными дополнениями друг друга, а объединение их базисов — базисом пространства  $\mathcal{E}$ . Однако это утверждение, верное для обычных евклидовых пространств, в рассматриваемом случае неверно. Действительно, введенное в начале этого параграфа скалярное произведение не является положительно определенным. Для такого рода линейных пространств в общем случае

$$\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset,$$

так что пространство циклов  $\mathcal{C}$  и пространство реберных разрезов  $\mathcal{B}$  являются ортогональными дополнениями друг для друга лишь тогда, когда  $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \emptyset$ . В этом случае как сам граф  $G$ , так и любой его подграф можно представить в виде суммы двух подграфов, один из которых принадлежит  $\mathcal{B}$ , а второй —  $\mathcal{C}$ . В общем же случае пересечение  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{E}$  может содержать нетривиальные подграфы. Простейший пример такого рода — это цикл  $C_4$ , в котором множество  $E(C_4)$  всех ребер одновременно индуцирует и цикл, и реберный разрез. Как следствие, в данном случае

$$\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \{\emptyset, E(C_4)\}.$$

**4.5.3.** Полученную выше формулу (12) можно переписать и на языке алгебраической (или комбинаторной) топологии, введя для графов так называемые числа Бетти. Именно, в топологии размерность  $|\mathcal{C}|$  пространства циклов называется первым числом Бетти  $\beta_1$ , а количество компонент связности графа  $G$  — числом Бетти  $\beta_0$ . Тем самым мы доказали, что количество  $n$  вершин и количество  $m$  ребер связано с числами Бетти  $\beta_0$  и  $\beta_1$  формулой

$$n - m = \beta_0 - \beta_1. \quad (13)$$

При этом стоящая в правой части этого равенства разность  $\beta_0 - \beta_1$  обозначается обычно через  $\chi(G)$  и называется эйлеровой характеристикой графа. В главе, посвященной планарным графам, мы выведем очень важную формулу — формулу Эйлера, связывающую количество вершин, ребер и граней любого плоского графа. Формула (13) является аналогом этой формулы для обычных графов.

Формула (13) важна, поэтому давайте дадим еще одно независимое ее доказательство индукцией по количеству ребер в графе  $G$ . База индукции  $m = 0$  тривиальна. Действительно, этот случай отвечает пустому графу  $G = \bar{K}_n$  на  $n$  вершинах, в котором циклы отсутствуют, так что размерность  $\beta_1$  пространства циклов равна нулю, а число  $\beta_0 = n$ .

Теперь предположим, что утверждение доказано для всех графов, имеющих  $m - 1$  ребро,  $m > 0$ , и покажем, что утверждение верно и для произвольного графа  $G$  на  $m$  ребрах. Удалим в этом графе произвольное ребро  $e$ . Возможно два случая — либо через это ребро проходит какой-то простой цикл, либо оно является мостом. Во втором случае количество связных компонент увеличится на единицу,  $n$  не изменится, а  $m$  уменьшится на единицу. Осталось показать, что и  $\beta_1$  в этом случае также не изменится. А это достаточно очевидно — мы знаем, что мост не принадлежит ни одному циклу в графе  $G$ , а следовательно, пространству  $\mathcal{C}$  не принадлежит. Поэтому удаление этого ребра никак на базис этого пространства не повлияет, а значит  $\beta_1$  не меняется, так что формула (13) для этого случая верна.

Осталось разобрать случай, когда  $e$  принадлежит некоторому циклу. В этом случае не меняются  $n$  и  $\beta_0$ , а  $m$  уменьшается на единицу. Осталось показать, что и  $\beta_1$  уменьшается на единицу. Для этого следует выбрать в пространстве  $\mathcal{C}$  базис так, чтобы только лишь один элемент этого базиса содержал ребро  $e$ . Сделать это можно, например, удалив из  $G$  ребро  $e$  и построив в графе  $G - e$  остовное дерево  $T(G)$ . Для такого дерева в исходном графе  $G$  ребро  $e$  порождает фундаментальный цикл  $C_e$ , являющийся одним из базисных векторов. При этом остальные базисные векторы ребро  $e$  содержать уже не будут. Тогда удаление  $e$  приведет нас к подпространству, размерность которого уменьшится на единицу. А это и означает, что после удаления  $e$  уменьшается на единицу и число Бетти  $\beta_1$ . Итак, и в этом случае формула (13) верна.

## 5 Циркуляции и напряжения. Электрические сети

**5.1.** В предыдущем параграфе мы показали, что четные подграфы и реберные разрезы неориентированного графа  $G$  образуют линейные ортогональные друг другу подпространства пространства  $\mathcal{E}$  ребер графа  $G$  над двухэлементным полем  $\mathbb{F}_2$  — пространство циклов  $\mathcal{C}$  и пространство разрезов  $\mathcal{B}$ . В данном параграфе мы рассмотрим аналоги этих конструкций для ориентированных графов.

**5.1.1.** Заметим, прежде всего, что наряду с обычными орграфами мы можем рассматривать и так называемые взвешенные орграфы.

**Определение 5.1.** *Взвешенным орграфом  $(D, f)$  называется орграф  $D$  вместе с функцией  $f: E(D) \rightarrow \mathbb{F}$ , заданной на множестве ребер орграфа  $D$  и принимающей значения из некоторого поля  $\mathbb{F}$ . Значение  $f(e)$  этой функции на ребре  $e$  называется *весом* ребра  $e$ , а сумма значений этой функции для ребер из некоторого подграфа  $H$  орграфа  $D$  называется *весом* соответствующего подграфа  $H$ .*

Взвешенные графы встречаются в большом количестве важных с практической точки зрения задач. Вес ребра в таких задачах позволяет, например, моделировать стоимость транспортировки того или иного продукта вдоль ребра, величину потока вещества вдоль ребра, или какие-то другие параметры сети, математической моделью которой является ориентированный граф  $D$ .

**Замечание 5.2.** Далее для простоты мы будем считать, что поле  $\mathbb{F}$  совпадает с полем  $\mathbb{R}$  вещественных чисел. Ситуации, в которых  $\mathbb{F}$  отлично от  $\mathbb{R}$ , будут оговариваться отдельно. Однако

во всех этих случаях мы будем предполагать, что  $\mathbb{F}$  представляет собой поле, характеристика которого отлична от двух, то есть поле, отличное от  $\mathbb{F}_2$ .

**5.1.2.** Часто удобно рассматривать функцию  $f: E(D) \rightarrow \mathbb{R}$  как вектор  $\mathbf{f}$  длины  $m$ , вещественные координаты которого помечены ребрами орграфа  $D$ . Так как такие векторы мы можем складывать и умножать на вещественные числа, то множество этих векторов образует для любого орграфа  $D$  линейное пространство, изоморфное  $\mathbb{R}^m$ ,  $m = |E(D)|$ .

Как и в случае неориентированного графа, на пространстве  $\mathbb{R}_m$  можно задать скалярное произведение векторов. Основным отличием такого пространства от пространства, рассмотренного в предыдущем параграфе, является тот факт, что в рассматриваемом случае скалярное произведение вырожденным не является:

$$(\mathbf{f}, \mathbf{f}) = 0 \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad \mathbf{f} = \mathbf{0}.$$

Как следствие, пространство  $\mathbb{R}_m$  является евклидовым, что существенным образом упрощает его изучение.

**5.1.3.** На практике довольно часто имеет смысл накладывать дополнительные ограничения на функцию  $f$  взвешенного орграфа  $(D, f)$ . Так, в случае моделирования процесса переноса вещества с помощью взвешенных орграфов функция  $f$  должна удовлетворять так называемому закону сохранения вещества, согласно которому количество вещества, поступающего в заданную вершину  $x$  орграфа  $D$ , должно совпадать с количеством вещества, из этой вершины исходящего. Если эти условия выполняются в каждой вершине орграфа, то соответствующая функция  $f$  носит название циркуляции в орграфе  $D$ .

**Определение 5.3.** Функция  $f$ , заданная на ребрах орграфа  $D$ , называется циркуляцией в орграфе  $D$ , если в каждой вершине  $x$  соответствующего взвешенного орграфа  $(D, f)$  выполняются следующие законы сохранения:

$$f^+(x) = f^-(x) \quad \text{для любой вершины } x \in V(D). \tag{14}$$

Здесь  $f^+(x)$  есть сумма весов ребер орграфа, входящих в вершину  $x$ , а  $f^-(x)$  — сумма весов исходящих из  $x$  ребер.

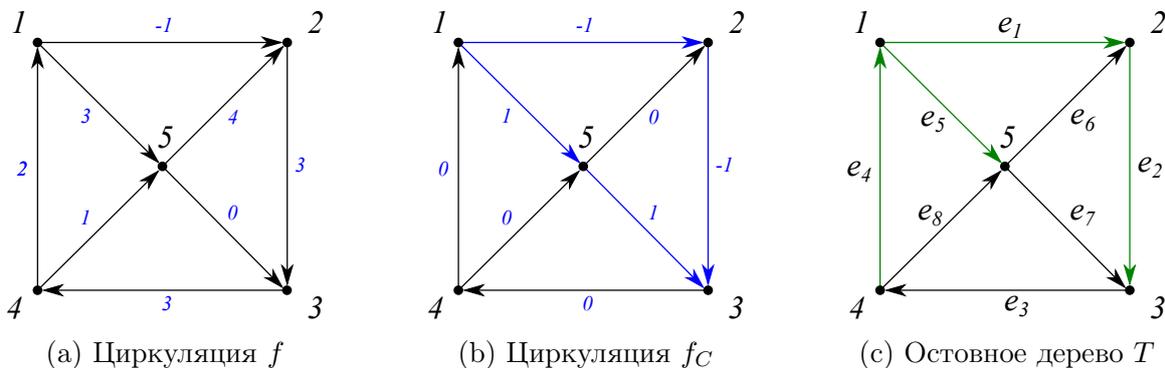


Рис. 27

**Пример 5.4.** Рассмотрим взвешенный орграф  $(D, f)$ , показанный на рис.27,а. Синими цифрами на этом рисунке показаны веса  $f(e)$  соответствующих ориентированных ребер  $e \in E(D)$ . Видно, что в каждой вершине  $x$  выполняется закон сохранения (14). Следовательно, отвечающий этим весам вектор  $\mathbf{f}$  представляет собой циркуляцию в орграфе  $D$ .

Условия (14) можно переписать в векторном виде, используя матрицу  $\mathbf{M}_i$  инцидентности орграфа  $D$ :

$$\mathbf{M}_i \cdot \mathbf{f} = \mathbf{0}. \quad (15)$$

Действительно, произведение любой строки матрицы  $\mathbf{M}_i$  на столбец  $\mathbf{f}$  даст нам сумму  $f(e_i)$  по всем ребрам, инцидентным соответствующей данной строке вершине  $x$  орграфа  $D$ . При этом значения  $f$  на ребрах, входящих в  $x$ , войдут в эту сумму со знаком минус, а значения  $f$  на ребрах, исходящих из  $x$  — со знаком плюс.

Рассмотрим теперь линейную оболочку строк матрицы  $\mathbf{M}_i$ , то есть совокупность всевозможных линейных комбинаций этих строк. Эта линейная оболочка представляет собой линейное подпространство  $\mathcal{B}$  пространства  $\mathbb{R}^m$ . Из равенства (15), в частности, следует, что любая циркуляция  $\mathbf{f}$  ортогональна этому подпространству. Последнее, в свою очередь, означает, что все циркуляции сами образуют линейное подпространство  $\mathcal{C}$  — линейное подпространство векторов, ортогональных  $\mathcal{B}$ . Подпространство  $\mathcal{C}$  называется *пространством циркуляций*  $\mathcal{C}$  орграфа  $D$ .

**5.1.4.** Рассмотрим наряду с ориентированным графом  $D$  соответствующий ему неориентированный (underlying) граф  $G$ . Оказывается, с любым циклом  $C$  в графе  $G$  мы можем связать некоторую циркуляцию. Именно, зададим какое-то направление обхода цикла  $C$  и определим функцию  $f_C$  на множестве ребер орграфа  $D$  следующим образом:

$$f_C(e) = \begin{cases} 1, & \text{если направление вектора } e \text{ совпадает с направлением обхода цикла } C, \\ -1, & \text{если } e \text{ направлен в сторону, противоположную направлению обхода } C, \\ 0, & \text{если } e \text{ не принадлежит циклу } C. \end{cases} \quad (16)$$

Несложно убедиться в том, что функция  $f_C$  удовлетворяет закону сохранения (14). Действительно, в любую вершину  $x \in C$  входит ровно одно ребро простого цикла  $C$ , и ровно одно же ребро из  $x$  выходит. Поэтому в случае, когда каждое инцидентное  $x$  ориентированное ребро, принадлежащее циклу, совпадает с направлением обхода  $C$ , закон сохранения (14) с очевидностью выполняются. Если же направление какого-то инцидентного  $x$  ориентированного ребра не совпадает с направлением цикла, то мы, назначая функции  $f_C$  на таком ребре значение, равное  $-1$ , подправляем сумму значений  $f$  на инцидентных  $x$  ребрах так, чтобы закон сохранения (14) выполнялся.

В качестве примера на рис.27,b показана циркуляция  $f_C$ , связанная с циклом, помеченным синим цветом на рисунке. Обход этого цикла  $C$  осуществляется против часовой стрелки.

**5.1.5.** Важно заметить, что описанные выше циркуляции  $f_C$ , связанные с циклами  $C$ , порождают все пространство  $\mathcal{C}$  циркуляций в орграфе  $D$ . Именно, справедливо следующее

**Утверждение 5.5.** *Любая циркуляция в орграфе  $D$  представляет собой линейную комбинацию циркуляций, связанных с циклами.*

Для доказательства этого утверждения нам понадобится понятие носителя функции  $f$ .

**Определение 5.6.** *Носителем функции  $f$  называется подмножество  $S$  элементов области определения  $f$ , на котором эта функция отлична от нуля:*

$$S = \{x \mid f(x) \neq 0\}.$$

В случае орграфа носитель функции  $f$  — это некоторое подмножество  $S = \{e_i\}$  ребер соответствующего  $D$  неориентированного графа  $G$  с  $f(e_i) \neq 0$ , которое, в свою очередь, можно рассматривать как остовный подграф  $H \leq G$ , индуцируемый подмножеством  $S$ .

**Лемма 5.7.** *Остовный подграф  $H$ , индуцированный носителем  $S$  отличной от нуля циркуляции  $\mathbf{f}$  в орграфе  $D$ , содержит хотя бы один цикл.*

**Доказательство.** Так как  $\mathbf{f}$  — это отличная от нуля циркуляция, то в любую вершину  $x$  подграфа  $H$  входит хотя бы одно ребро орграфа  $D$ , и хотя бы одно ребро из нее выходит. Следовательно, степень любой вершины  $x$  в подграфе  $H$  обязана быть больше или равной двум. Как следствие, подмножество  $S$  ребер содержит хотя бы один цикл  $C$ .  $\square$

**5.1.6.** Приступим теперь к доказательству утверждения 5.5. Рассмотрим произвольную циркуляцию  $f$  с носителем  $S$ . Будем доказывать данное утверждение индукцией по  $|S|$ . Случай  $S = \emptyset$  тривиален. Пусть теперь  $|S| > 0$ . Согласно лемме 5.7, подмножество  $S$  ребер содержит хотя бы один цикл  $C$ . Рассмотрим произвольное ребро  $e \in C$ , выберем направление обхода  $C$ , совпадающее с ориентацией ребра  $e$ , и построим на  $C$  циркуляцию  $\mathbf{f}_C$  вида (16). Тогда у циркуляции  $\mathbf{f}' := \mathbf{f} - f(e) \cdot \mathbf{f}_C$  мощность подмножества  $S'$  ребер, на которых  $f'$  отлична от нуля, будет хотя бы на единицу меньше мощности подмножества  $S$ . По индукционному предположению,  $f'$  можно представить в виде линейной комбинации циркуляций, связанных с циклами в графе  $G$ . Следовательно, то же утверждение верно и для циркуляции

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}' + f(e) \cdot \mathbf{f}_C.$$

**Замечание 5.8.** Доказанное утверждение является аналогом доказанной в предыдущем параграфе теоремы Веблена для неориентированных графов. В роли четных подграфов здесь выступают циркуляции  $\mathbf{f}$ . В предыдущем параграфе нам приходилось отдельно доказывать, что подмножество четных подграфов замкнуто относительно операции  $\Delta$  симметрической разности. Здесь нам это отдельно доказывать не пришлось — мы воспользовались известным результатом линейной алгебры, согласно которому подмножество  $\mathcal{C}$  векторов, ортогональных некоторому линейному подпространству  $\mathcal{B}$ , само образует подпространство исходного линейного пространства  $\mathbb{R}_m$ .

**5.1.7.** Рассмотрим теперь произвольное остовное дерево  $T$  графа  $G$  (см. рис.27,с, на котором ребра остовного дерева  $T$  помечены зеленым цветом). С каждым таким деревом мы можем связать набор из  $m - (n - 1)$  фундаментальных циклов  $C_{e_i}$ ,  $e_i \notin T$ , каждый из которых получается добавлением к ребрам из  $T$  ребра  $e_i$ . В свою очередь, для каждого из этих циклов мы можем построить циркуляцию  $\mathbf{f}_{e_i}$ , связанную с этим циклом, полагая  $\mathbf{f}_{e_i}(e_i) = 1$  и используя правила (16).

В качестве примера рассмотрим остовное дерево  $T$ , показанное на рис.27,с. С каждым из четырех ребер  $e \notin E(T)$  мы можем связать фундаментальный цикл  $C_e$ . Соответствующие этим циклам циркуляции  $\mathbf{f}_{e_i}$  имеют следующий вид:

|                      | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_5$ | $e_6$ | $e_7$ | $e_8$ |
|----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\mathbf{f}_{e_3}^T$ | 1     | 1     | 1     | 1     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| $\mathbf{f}_{e_6}^T$ | -1    | 0     | 0     | 0     | 1     | 1     | 0     | 0     |
| $\mathbf{f}_{e_7}^T$ | -1    | -1    | 0     | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     |
| $\mathbf{f}_{e_8}^T$ | 0     | 0     | 0     | -1    | -1    | 0     | 0     | 1     |

**5.2.** Заметим, что векторы  $\mathbf{f}_{e_i}$  линейно независимы. Действительно,  $i$ -я координата каждого из этих векторов равна единице, а координаты  $j \neq i$ , связанные с оставшимися векторами  $e_j$ , не принадлежащими  $E(T)$ , равны нулю. Как и в неориентированном случае, нам осталось показать, что набор этих линейно независимых векторов образует базис пространства  $\mathcal{C}$ . Однако

в данном случае это будет проще сделать, изучив ортогональное к  $\mathcal{C}$  подпространство  $\mathcal{B}$  строк матрицы  $\mathbf{M}_i$ .

**5.2.1.** По определению, любой элемент  $\mathbf{g}$  пространства  $\mathcal{B}$  представляет собой линейную комбинацию строк  $\mathbf{m}_i$  матрицы  $\mathbf{M}_i$ :

$$\mathbf{g} = \sum_{i=1}^n p(i) \cdot \mathbf{m}_i = \mathbf{p} \cdot \mathbf{M}_i, \quad n = |V(D)|. \quad (17)$$

Здесь  $\mathbf{p} = (p(1), \dots, p(n))$  есть некоторый вектор-строка линейного пространства  $\mathbb{R}^n$ . По сути дела, вектор  $\mathbf{p}$  сопоставляет каждой вершине  $i \in V(D)$  орграфа  $D$  некоторое вещественное число  $p(i)$ .

Рассмотрим теперь отдельную компоненту  $g_k = \mathbf{g}(e_k)$  вектора  $\mathbf{g}$ , отвечающую ребру  $e_k = (x, y)$ , направленному от вершины  $x$  к вершине  $y$ . Так как любой столбец матрицы  $\mathbf{M}_i$  содержит всего два ненулевых числа, а именно, 1 в строке, отвечающей вершине  $x$ , и  $-1$  в строке, отвечающей вершине  $y$ , то

$$g_k = \mathbf{g}(e_k) = \mathbf{p}(x) - \mathbf{p}(y). \quad (18)$$

Выписанные соотношения допускают следующую интересную физическую трактовку. Вектор  $\mathbf{p}$  мы можем рассматривать как вектор потенциалов в электрической сети, моделируемой ориентированным графом  $D$ . Вектор  $\mathbf{g}$  мы можем тогда рассматривать как вектор разности этих потенциалов, то есть как вектор напряжений в сети. Из этих соображений пространство, натянутое на строки матрицы  $\mathbf{M}_i$ , называется пространством  $\mathbf{V}$  напряжений, а элементы этого пространства называются напряжениями.

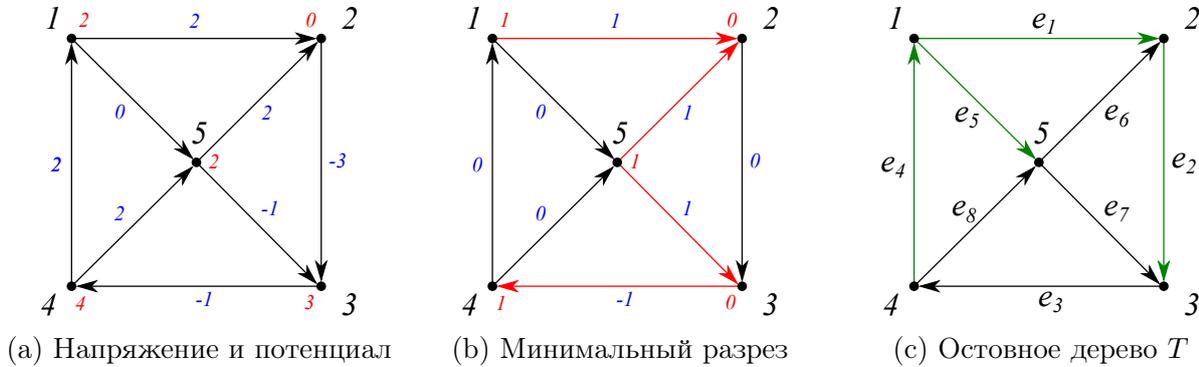


Рис. 28

На рис.28,а в качестве примера показан взвешенный оргграф  $(D, g)$ , веса ребер которого описываются координатами вектора  $\mathbf{g}$  напряжений (синие цифры на рисунке). Помеченные красным цветом числа обозначают значения функции  $\mathbf{p}(x)$  на множестве вершин. Видно, что координаты векторов  $\mathbf{g}$  и  $\mathbf{p}$  связаны равенствами (18).

**5.2.2.** Мы уже знаем, что любой цикл графа  $G$  порождает в оргграфе  $D$  некоторую циркуляцию  $\mathbf{f}_C$ . Аналогично, любой минимальный реберный разрез  $\partial(X) =: B$  графа  $G$ , связанный с подмножеством вершин  $X$ , порождает в оргграфе  $D$  вектор  $\mathbf{g}_B$  с координатами

$$g_B(e) = \begin{cases} 1, & \text{если } e \in \partial^+(X), \text{ то есть если ребро } e \text{ исходит из } X, \\ -1, & \text{если } e \in \partial^-(X), \text{ то есть если ребро } e \text{ входит в } X, \\ 0, & \text{если } e \text{ не принадлежит разрезу } \partial(X). \end{cases} \quad (19)$$

Несложно убедиться, что заданный этими равенствами вектор  $g_B$  является напряжением. Действительно, если ввести потенциал  $p_B$  вида

$$p_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in X, \\ 0, & \text{если } x \notin X, \end{cases} \quad (20)$$

то умножение  $p_B$  на матрицу  $M_i$  как раз и даст нам вектор  $g_B$ .

На рис.28,b в качестве примера показан минимальный реберный разрез  $B = \partial(X)$ ,  $X = \{1, 4, 5\}$ , помеченный красными ребрами на рисунке. Значения отвечающего этому разрезу напряжения  $g_B$  помечены синими числами, а значения потенциала — красными числами.

**5.2.3.** Довольно очевидным является тот факт, что все пространство  $\mathcal{B}$  порождается напряжениями  $g_B$ , связанными с минимальными реберными разрезами.

**Лемма 5.9.** *Носитель  $S$  любого отличного от нуля напряжения  $g$  в орграфе содержит хотя бы один минимальный реберный разрез  $B = \partial(X)$ .*

**Доказательство.** Пусть  $g = p \cdot M_i$  есть напряжение, для которого  $S \neq \emptyset$ . Выделим произвольное ребро  $(x, y) \in S$ , возьмем в качестве  $X$  подмножество вершин, потенциалы которых совпадают с  $p(x)$ , и рассмотрим реберный разрез  $\partial(X)$ . По построению множества  $X$ , напряжение  $g(e)$  на любом ребре  $e$ , принадлежащем разрезу  $\partial(X)$ , отлично от нуля. Так как  $S$  есть все множество ребер, на которых функция  $g$  отлична от нуля, то  $\partial(X) \subseteq S$ . Кроме того,  $\partial(X) \neq \emptyset$  — это множество обязательно содержит ребро  $(x, y)$ . Поэтому  $\partial(X)$  есть нетривиальный реберный разрез. Но такой разрез либо сам является минимальным, либо содержит хотя бы один минимальный реберный разрез  $B$ . Отсюда следует, что и  $S$  содержит  $B$ .

**Утверждение 5.10.** *Любое напряжение  $g$  в орграфе представляет собой линейную комбинацию напряжений  $g_B$ , связанных с минимальными реберными разрезами.*

**Доказательство** полностью аналогично доказательству утверждения 5.5. Именно, пусть  $g$  есть произвольное напряжение, а  $S$  — подмножество ребер, на которых функция  $g$  отлична от нуля. Докажем утверждение индукцией по  $|S|$ . Утверждение тривиально в случае  $S = \emptyset$ . Предположим, что  $|S| > 0$ . Согласно лемме 5.9,  $S$  содержит минимальный реберный разрез  $\partial(X) =: B$ . Выберем произвольное ребро  $e = (x, y) \in \partial(X)$ , исходящее из  $X$ . В случае, если такое ребро отсутствует, то есть в случае, когда все ориентированные ребра  $D$  входят в  $X$ , выберем в качестве  $B$  реберный разрез  $\partial(V(G) \setminus X)$ , а в качестве  $e$  — произвольное ребро, входящее в  $X$ . Рассмотрим теперь напряжение  $g' := g - g(e) \cdot g_B$ . На ребре  $e$  напряжение  $g'(e) = 0$ , так что его носитель  $S' \subset S$ . Следовательно, к нему можно применить индукционное предположение, то есть представить его в виде линейной комбинации напряжений, связанных с минимальными реберными разрезами в  $G$ . Но тогда это же утверждение верно и для напряжения

$$g := g' + g(e) \cdot g_B.$$

**5.2.4.** Как и в неориентированном случае, мы всегда в  $\mathcal{B}$  можем найти набор, состоящий из  $n - 1$  линейно независимых векторов  $g_i$  напряжений. Для этого нам достаточно рассмотреть остовное дерево  $T$  в графе  $G$ , выбрать в этом графе  $n - 1$  фундаментальный разрез  $B_{e_i}$ ,  $e_i \in E(T)$ , и построить соответствующие этим разрезам напряжения  $g_{e_i}$ .

В качестве примера рассмотрим остовное дерево  $T$ , показанное на рис.28,c. С каждым из четырех ребер  $e_i \in E(T)$  мы можем связать фундаментальный разрез  $B_{e_i}$ . Соответствующие этим

разрезам напряжения  $\mathbf{g}_{e_i}$  записываются в следующем виде:

|                    | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_5$ | $e_6$ | $e_7$ | $e_8$ |
|--------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\mathbf{g}_{e_1}$ | 1     | 0     | -1    | 0     | 0     | 1     | 1     | 0     |
| $\mathbf{g}_{e_2}$ | 0     | 1     | -1    | 0     | 0     | 0     | 1     | 0     |
| $\mathbf{g}_{e_4}$ | 0     | 0     | -1    | 1     | 0     | 0     | 0     | 1     |
| $\mathbf{g}_{e_5}$ | 0     | 0     | 0     | 0     | 1     | -1    | -1    | 1     |

Как и векторы  $\mathbf{f}_{e_i}$ , векторы  $\mathbf{g}_{e_i}$  линейно независимы. Нам осталось показать, что эти векторы образуют базис пространства  $\mathcal{B}$ . Это легче всего сделать, рассматривая одновременно пространства  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{C}$ .

**5.2.5.** Покажем, прежде всего, что любая пара векторов  $\mathbf{g} \in \mathcal{B}$  и  $\mathbf{f} \in \mathcal{C}$  взаимно ортогональна. Действительно, согласно определению (17) напряжения  $\mathbf{g}$ , любой такой вектор можно представить в виде  $\mathbf{g} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{M}_i$ . Но, согласно (15), произведение  $\mathbf{M}_i \cdot \mathbf{f} = \mathbf{0}$  для любого вектора  $\mathbf{f} \in \mathcal{C}$ . Следовательно, скалярное произведение

$$\mathbf{g} \cdot \mathbf{f} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{M}_i \cdot \mathbf{f} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{0} = 0.$$

Таким образом, нами доказано следующее

**Утверждение 5.11.** *Пространства  $\mathcal{C}$  циркуляций и  $\mathcal{B}$  напряжений взаимно ортогональны. При этом их пересечение состоит из единственного вектора  $\mathbf{0}$  — тривиального цикла и тривиального разреза.*

**Следствие 5.12.** *Размерности пространства  $\mathcal{B}$  напряжений и  $\mathcal{C}$  циркуляций орграфа  $D$  равны*

$$\dim(\mathcal{B}) = n - 1, \quad \dim(\mathcal{C}) = m - n + 1,$$

*а соответствующие фундаментальным разрезам и фундаментальным циклам графа  $G$  напряжения и циркуляции орграфа  $D$  образуют базисы пространств  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{C}$ .*

**Доказательство.** Действительно, мы в пространстве  $\mathcal{B}$  предъявили  $n - 1$  линейно независимых векторов — напряжений, связанных с  $(n - 1)$ -м фундаментальным разрезом орграфа  $D$ . Аналогично, в пространстве  $\mathcal{C}$  мы предъявили  $m - (n - 1)$  линейно независимых векторов — циркуляций, связанных с  $(m - n + 1)$ -м фундаментальным циклом в этом орграфе. Следовательно, размерность пространства  $\mathcal{B}$  больше или равна  $n - 1$ , а размерность пространства  $\mathcal{C}$  больше или равна  $m - (n - 1)$ . Но так как пространства  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{C}$  взаимно ортогональны, то сумма размерностей этих подпространств не может превосходить размерности  $m$  всего пространства строк длины  $m$ . Поэтому размерности подпространств  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{C}$  равны, соответственно,  $n - 1$  и  $m - (n - 1)$ , а описанные выше векторы образуют базисы в этих пространствах. При этом само пространство векторов длины  $m$  представляет собой прямую сумму подпространств  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{C}$  (см.[?], теорема 3, стр.27).

**5.3.** Покажем теперь, как применить полученные выше результаты в очень важной с практической точки зрения задаче, связанной с расчетом электрических цепей.

**5.3.1.** Мы уже замечали ранее, что любой вектор  $\mathbf{f}$  циркуляции в орграфе  $D$  с физической точки зрения можно рассматривать как некоторый ток в сети, моделируемой орграфом  $D$ , а любой вектор  $\mathbf{g} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{V}_i$  напряжения в  $D$  с той же точки зрения можно трактовать как некоторое напряжение в этой сети, задаваемое вектором-строкой потенциалов  $\mathbf{p}$ . В реальной жизни

напряжение и ток в сети связаны друг с другом — согласно закону Ома, падение напряжения  $U$  между двумя узлами цепи пропорционально силе тока  $I$  на этом участке цепи:

$$u = r \cdot i.$$

Коэффициент пропорциональности  $r$  носит название электрического сопротивления участка цепи. В случае, если между рассматриваемыми узлами электрической цепи имеется источник электродвижущей силы (ЭДС) — идеализированный генератор напряжения — мощностью  $h$ , то закон Ома переписывается в виде

$$u + h = r \cdot i.$$

В матричном виде это уравнение можно записать так:

$$\mathbf{u} + \mathbf{h} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{i}.$$

Здесь  $\mathbf{R}$  — диагональная матрица сопротивлений,  $\mathbf{h}$  — вектор ЭДС,  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{u}$  — векторы силы тока и напряжения в рассматриваемой электрической цепи.

**5.3.2.** В 1847 году Кирхгоф сформулировал два закона, описывающих поведение токов и напряжений в электрической сети. Первый закон гласит, что алгебраическая сумма токов в каждом узле электрической цепи равна нулю. На языке теории графов это означает, что  $\mathbf{i}$  представляет собой циркуляцию в орграфе  $D$ , моделирующем электрическую сеть. Как следствие, первый закон Кирхгофа можно переписать в виде

$$\mathbf{M}_i \cdot \mathbf{i} = \mathbf{0},$$

где  $\mathbf{M}_i$  — матрица инцидентности орграфа  $D$ .

Так как размерность пространства  $\mathcal{B}$  столбцов матрицы  $\mathbf{M}_i$  равна  $n - 1$ , то тому же значению равен и ранг матрицы  $\mathbf{M}_i$ . Мы знаем, что сумма всех строк матрицы  $\mathbf{M}_i$  даст нам нулевую строку. Следовательно, любая строка этой матрицы есть линейная комбинация оставшихся  $n - 1$  строк. Удаляя эту строку, мы получим так называемую *матрицу Кирхгофа*  $\mathbf{K}$ , ранг которой равен  $n - 1$ . Следовательно, строки этой матрицы мы также можем взять в качестве базисных строк пространства  $\mathcal{B}$ . Первый же закон Кирхгофа мы, таким образом, можем переписать так:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{0}.$$

Действительно, если вектор силы тока  $\mathbf{i}$  окажется ортогональным всем  $n - 1$  строкам матрицы  $\mathbf{K}$ , то он автоматически окажется ортогональным и последней,  $n$ -й строке матрицы  $\mathbf{M}_i$ .

**5.3.3.** Второй закон Кирхгофа утверждает, что алгебраическая сумма падения напряжения на любом замкнутом контуре электрической цепи равна нулю. Перебирать все циклы в моделирующей электрическую цепь орграфе нам не нужно — достаточно взять систему фундаментальных циклов соответствующего  $D$  неориентированного графа  $G$ . Предположим, что вектор  $\mathbf{u}$  напряжений электрической цепи удовлетворяет матричному уравнению

$$\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0},$$

где

$$\mathbf{C} = [\mathbf{f}_{e_1} \quad \mathbf{f}_{e_2} \quad \dots \quad \mathbf{f}_{e_{m-(n-1)}}]$$

есть базисная матрица пространства циклов,  $m - (n - 1)$  столбцов которой состоят из векторов  $\mathbf{f}_{e_i}$  фундаментальных циркуляций, отвечающих фундаментальным циклам графа  $G$ . В этом случае падение напряжения на любом контуре электрической цепи также будет равняться нулю.

**5.3.4.** Закон Ома и законы Кирхгофа представляют собой замкнутую систему линейных алгебраических уравнений для определения силы тока и напряжения в электрической сети при заданных сопротивлениях и ЭДС. Покажем, как решить эту систему, используя изложенные в первой части параграфа сведения.

Пусть  $T$  есть какое-то остовное дерево соответствующего  $D$  графа  $G$ . Свяжем с этим деревом систему  $\mathbf{f}_{e_i}$  фундаментальных циркуляций и построим по этим векторам матрицу  $\mathbf{C}$ . Эту матрицу нам будет удобно записать в следующем блочном виде:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_t \\ \mathbf{E}_c \end{bmatrix}.$$

Здесь  $\mathbf{E}_c$  есть единичная матрица размерами  $(m - n + 1) \times (m - n + 1)$ , а  $\mathbf{C}_t = \mathbf{C}_t[n - 1, m - n + 1]$  — неособая подматрица размерами  $(n - 1) \times (m - n + 1)$ , отвечающая ребрам дерева  $T$ .

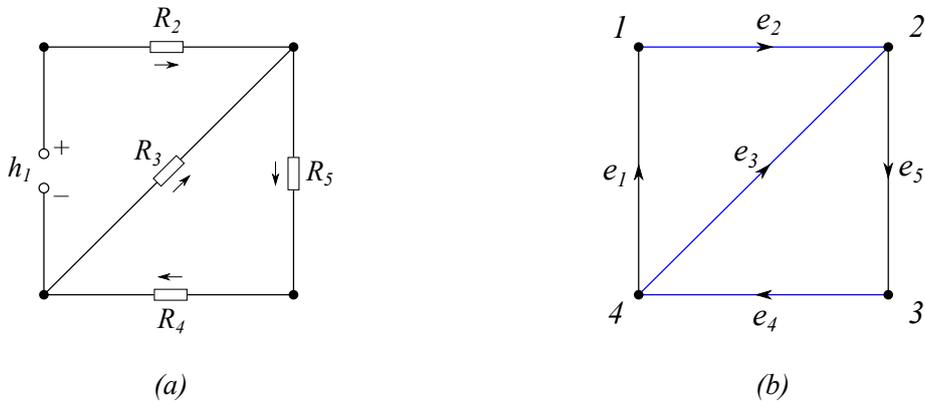


Рис. 29

В качестве примера рассмотрим электрическую цепь, показанную на рис.29,а. Ей отвечает ориентированный граф, изображенный на рис.29,б. В качестве остовного дерева  $T$  выберем неориентированный подграф, порожденный ребрами  $e_2, e_3, e_4$  (синие ребра на рис.29,б). Тогда соответствующая этому орграфу матрица  $\mathbf{C}$  может быть записана так:

$$\mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Первая строка матрицы  $\mathbf{C}^T$  отвечает фундаментальному циклу, порожденному ребром  $e_1$ , а вторая — циклу, порожденному ребром  $e_5$ . Порядок обхода циклов в соответствующем  $D$  неориентированном графе  $G$  совпадает с направлением порождающих их векторов  $e_1$  и  $e_5$ .

В аналогичном блочном виде мы можем представить и матрицу Кирхгофа:

$$\mathbf{K} = [\mathbf{K}_t \quad \mathbf{K}_c].$$

Заметим, что так как  $\mathbf{K}_t = \mathbf{K}_t[n - 1, n - 1]$  порождена столбцами, соответствующими дереву  $T$ , то определитель этой подматрицы отличен от нуля, то есть матрица  $\mathbf{K}_t[n - 1, n - 1]$  особой не является. Подматрица  $\mathbf{K}_c = \mathbf{K}_c[n - 1, m - n + 1]$  имеет размеры  $(n - 1) \times (m - n + 1)$ .

Для рассматриваемого нами примера электрической цепи (рис.29,а) матрицы  $\mathbf{M}_i$  и  $\mathbf{K}$  имеют

следующий вид:

$$\mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Так как любой цикл ортогонален любой строке матрицы  $\mathbf{K}$ , то

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{K}_t \cdot \mathbf{C}_t + \mathbf{K}_c = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{C}_t = -\mathbf{K}_t^{-1} \cdot \mathbf{K}_c.$$

**5.3.5.** Вернемся к электрической цепи. Как и матрицы  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{C}$ , мы можем представить векторы  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{u}$  в виде

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_t \\ \mathbf{i}_c \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_t \\ \mathbf{u}_c \end{bmatrix}.$$

Тогда из первого закона Кирхгофа  $\mathbf{K} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{0}$  мы получаем следующие равенства:

$$\mathbf{K}_t \cdot \mathbf{i}_t + \mathbf{K}_c \cdot \mathbf{i}_c = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{i}_t = -\mathbf{K}_t^{-1} \cdot \mathbf{K}_c \cdot \mathbf{i}_c = \mathbf{C}_t \cdot \mathbf{i}_c.$$

Учитывая, что  $\mathbf{i}_c = \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{i}_c$ , а также тот факт, что матрица  $\mathbf{C}$  состоит из подматриц  $\mathbf{C}_t$  и  $\mathbf{E}_c$ , мы последнее равенство можем записать так:

$$\mathbf{i} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{i}_c.$$

Иными словами, мы показали, что значения силы тока полностью определяются значениями силы тока на ребрах, не принадлежащих остовному дереву  $T$ .

Подставим теперь полученное выражение для  $\mathbf{i}$  в закон Ома:

$$\mathbf{u} + \mathbf{h} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{i}_c.$$

Домножая это уравнение слева на  $\mathbf{C}^T$  и учитывая второй закон Кирхгофа  $\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$ , мы получаем систему линейных уравнений

$$(\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{i}_c = \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{h},$$

позволяющую определить элементы вектора  $\mathbf{i}$ , принадлежащие  $\mathbf{i}_c$ . Зная эти компоненты, мы вначале с помощью равенства  $\mathbf{i} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{i}_c$  определим оставшиеся значения вектора  $\mathbf{i}$ , а затем из закона Ома получим значения вектора  $\mathbf{u}$  напряжений электрической сети.

**5.3.6.** Вернемся к примеру электрической цепи, показанному на рис.29,а. Для такого случая

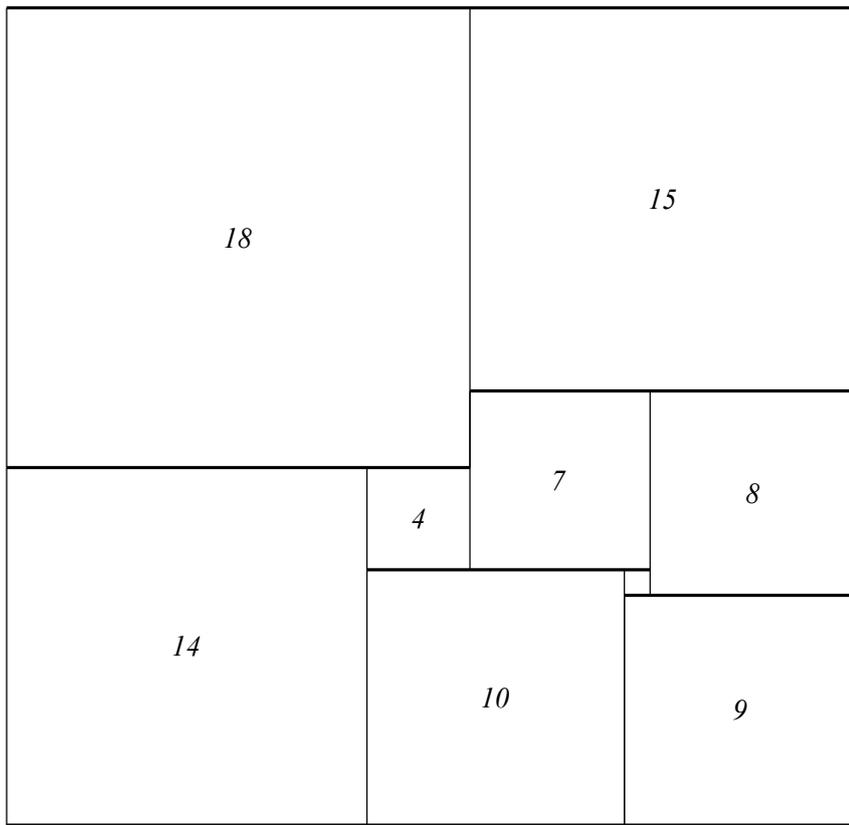
$$\mathbf{i}_c = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} = \begin{bmatrix} R_2 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_3 + R_4 + R_5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Как следствие,

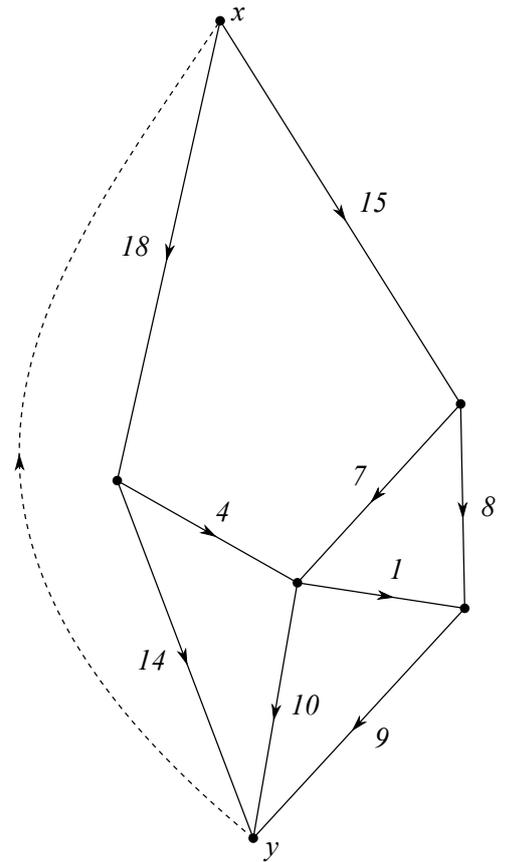
$$i_1 = \frac{h_1(R_3 + R_4 + R_5)}{R_2(R_3 + R_4 + R_5) + R_3(R_4 + R_5)}, \quad i_5 = \frac{h_1 R_3}{R_2(R_3 + R_4 + R_5) + R_3(R_4 + R_5)}.$$

При этом

$$i_4 = i_5, \quad i_2 = -i_1, \quad i_3 = i_5 + i_1,$$



(a)



(b)

Рис. 30

а напряжения рассчитываются по формулам

$$u_1 = h_1, \quad u_2 = R_2 i_2, \quad u_3 = R_3 i_3, \quad u_4 = R_4 i_4, \quad u_5 = R_5 i_5.$$

**5.3.7.** В заключение данного параграфа поговорим о достаточно неожиданном применении теории электрических цепей, связанном с задачей квадрирования прямоугольников. Задача квадрирования прямоугольника (squared rectangle) состоит в нахождении разбиения заданного прямоугольника на конечное число попарно неравных между собой квадратов. На рис.30,а показан пример одного из таких прямоугольников, разбитого на 9 попарно неравных между собой квадратов. Оказывается, задача построения такого разбиения напрямую связана с задачей построения токов и напряжений в электрической сети.

Действительно, рассмотрим горизонтальные стороны квадратов, помеченные жирными линиями на рис.30,а. Сопоставим любой такой стороне вершину в строящемся орграфе  $D$  (рис.30,б). Соединим две вершины  $x_i$  и  $x_j$  ребром  $e = (x_i, x_j)$  в случае, если соответствующие этим вершинам горизонтальные стороны относятся к одному и тому же квадрату. Вершины  $x$  и  $y$ , отвечающие крайней верхней и крайней нижней сторонам, называются полюсами орграфа  $D$ . Веса на ребрах отвечают ширине соответствующего квадрата. Если теперь считать, что сопротивления каждого из участков цепи равны единице, то напряжения, равные токам, будут удовлетворять закону сохранения заряда в любой вершине, отличной от  $x$  и  $y$ . Добавляя к этому орграфу ребро  $(y, x)$  с весом, равным суммарной ширине прямоугольника, мы получаем электрическую

сеть, удовлетворяющую обоим законам Кирхгофа. При этом мы можем считать, что вес ребра  $(y, x)$  есть электродвижущая сила, приложенная к вершинам  $x$  и  $y$  орграфа  $D$ .

Brooks, Smith, Stone and Tutte в 1940 году показали, что в случае так называемого просто-го квадрированного прямоугольника, то есть в случае прямоугольника, не содержащего в себе никакого правильно квадрированного прямоугольника меньшего размера, соответствующий этому прямоугольнику орграф  $D$  является планарным трехсвязным графом. Они же доказали обратное, а именно, что любому такому орграфу отвечает некоторый квадрированный прямоугольник.

# СВЯЗНОСТЬ В ГРАФАХ

## 6 Вершинная и реберная связность графа

**6.1.** Любая коммуникационная сеть тем более надежна, чем большее количество вершин и/или ребер нужно удалить в графе (или в орграфе), моделирующем эту сеть, для того, чтобы эту сеть оборвать. Раздел теории графов, описывающий такого рода свойства надежности, называется теорией связности. К изучению этой теории мы и приступаем в данном параграфе.

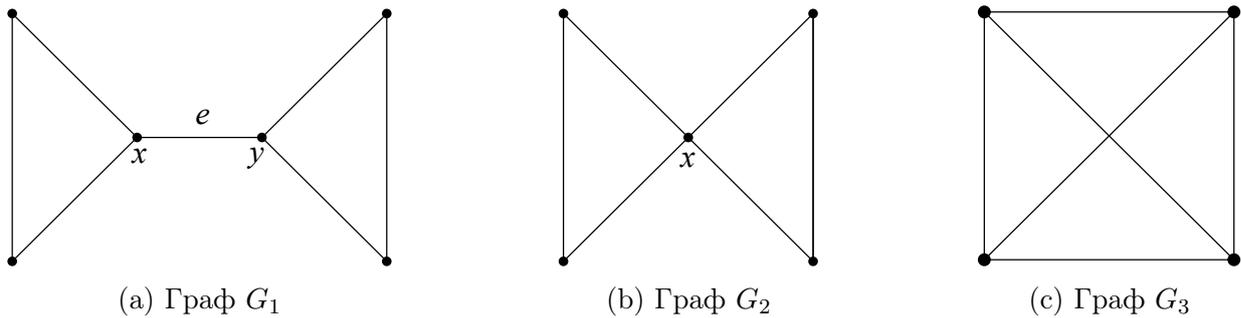


Рис. 31

**6.1.1.** Рассмотрим в качестве примера три графа, изображенные на рис.31. Видно, что с точки зрения надежности все эти три графа достаточно сильно отличаются друг от друга. Показанный на рис.31,а граф  $G_1$  наименее надежен — его можно превратить в несвязный удалением как одной из двух вершин  $x$  или  $y$ , так и удалением ребра  $e = \{x, y\}$  (моста графа  $G_1$ ). Граф  $G_2$  (рис.31,б) с этой точки зрения выглядит лучше — у него нет ни одного ребра, удалив которое, мы развалим  $G_2$  на несколько связных компонент. Однако у него имеется вершина  $x$  (точка сочленения графа  $G_2$ ), удаление которой приводит к потере связности графа. Наконец, граф  $G_3$  с рассматриваемой точки зрения является наиболее надежным — у него нет ни мостов, ни точек сочленения, удаление которых приводит к потере связности графа.

Про граф  $G_1$  говорят, что он реберно и вершинно односвязен, про граф  $G_2$  — что он вершинно односвязен, но реберно двусвязен, а про граф  $G_3$  — что он реберно и вершинно двусвязен. Наша задача состоит в том, чтобы дать формальное определение этих понятий.

**6.1.2.** Начнем мы с понятия реберной связности графа  $G$ . Напомним, что в прошлой главе мы дали понятие реберного разделяющего множества  $F$ , реберного разреза  $\partial X$ , а также минимального реберного разреза. Выберем среди всех минимальных реберных разрезов графа  $G$  тот, количество ребер в котором минимально. Количество ребер в таком разрезе и называется реберной связностью  $\lambda(G)$ . Иными словами, мы можем дать следующее определение.

**Определение 6.1.** Реберной связностью  $\lambda(G)$  графа  $G$  называется минимальное количество ребер, которое нужно удалить в графе  $G$  для того, чтобы он стал несвязным.

В случае несвязного графа или графа  $K_1$  реберная связность считается равной нулю.

**6.1.3.** Реберную связность можно определить и с помощью еще одного важного понятия — реберно  $k$ -связного графа.

**Определение 6.2.** Граф  $G$ , построенный на  $n$  вершинах, называется *реберно  $k$ -связным*, если он остается связным при удалении любых ребер в количестве, строго меньшем  $k$ .

Например, любой граф, в котором имеется мост, является реберно односвязным графом, но реберно двусвязным он уже не является. Любой цикл  $C_n$  является реберно односвязным и реберно двусвязным, однако реберно трехсвязным он уже не является. Наконец, полный граф  $K_n$  в случае  $n > 1$  является реберно  $(n - 1)$ -связным графом.

Ясно, что любой реберно  $k$ -связный граф является также реберно  $i$ -связным для любых  $i$ ,  $0 \leq i \leq k$ .

**Определение 6.3.** Наибольшее значение  $k$ , при котором граф  $G$  все еще остается реберно  $k$ -связным, называется *реберной связностью*  $\lambda(G)$  графа.

**6.1.4.** Перейдем теперь к определению вершинной связности графа  $G$ .

**Определение 6.4.** Подмножество  $S \subset V(G)$  называется *вершинно разделяющим множеством* или *вершинным разрезом* графа, если при удалении вершин из множества  $S$  граф  $G - S$  становится несвязным.

Казалось бы, по аналогии с реберной связностью мы можем определить вершинную связность как количество вершин в минимальном вершинно разделяющем множестве  $S$ . Однако такое определение не охватывает важный частный случай полного графа  $K_n$ . Действительно, у полного графа  $K_n$ , построенного на  $n > 0$  вершинах, вершинно разделяющее множество отсутствует — удаление любого количества вершин  $|S|$  в этом графе не нарушает его связности. Поэтому вершинную связность нам нужно определить чуть более аккуратно.

**Определение 6.5.** *Вершинной связностью*  $\kappa(G)$  называется минимальное количество вершин  $|S|$ ,  $S \subset V(G)$ , которое нужно удалить для того, чтобы граф  $G - S$  стал несвязным или же содержал единственную вершину.

Как следствие, вершинная связность любого полного графа  $K_n$  равна  $\kappa(K_n) = n - 1$ . В частности, граф  $K_1$ , состоящий из единственной изолированной вершины, имеет связность, равную нулю. Ребро  $K_2$  имеет связность, равную единице. Полный граф  $K_3$  на трех вершинах имеет связность, равную двум, а дерево  $T_3$  — связность  $\kappa(T_3) = 1$ . Первый нетривиальный простой граф с  $\kappa = 2$  — это цикл  $n$ .

**6.1.5.** Связность можно также определить, используя понятие (вершинно)  $k$ -связного графа.

**Определение 6.6.** Граф  $G$  называется (вершинно)  $k$ -связным, если он построен на  $n \geq (k + 1)$  вершине, и при удалении любых вершин графа  $G$  в количестве, меньшем, чем  $k$ , граф остается связным.

**Определение 6.7.** Вершинной связностью  $\kappa(G)$  графа  $G$  называется максимально возможное  $k$ , для которого граф остается вершинно  $k$ -связным.

**Пример 6.8.** Граф  $K_4$  с  $\kappa(K_4) = 3$  является 1-связным, 2-связным и 3-связным, но не 4-связным графом, хотя бы потому, что он построен на четырех вершинах.

**6.2.** Наша следующая задача состоит в том, чтобы получить какие-то простейшие оценки на числа  $\lambda(G)$  и  $\kappa(G)$ .

**6.2.1.** Обозначим через  $\delta(G)$  минимальную из степеней вершин графа  $G$ . Достаточно очевидно, что реберная связность графа ограничена сверху значением  $\delta(G)$ . Действительно, удаление всех ребер, инцидентных вершине  $x$  с  $\deg(x) = \lambda(G)$ , превращает любой граф в несвязный.

Несколько менее тривиальным является следующее

**Утверждение 6.9.** *Для любого простого графа  $G$  справедливо неравенство*

$$\kappa(G) \leq \lambda(G).$$

**Доказательство.** Рассмотрим некоторый минимальный реберный разрез  $[S, \bar{S}] = \{e_1, \dots, e_k\}$ ,  $k = \lambda(G)$ , в графе  $G$ . Нам нужно показать, что в графе  $G$  найдется не более чем  $k$  вершин, удаление которых приведет либо к потере связности, либо к появлению графа  $K_1$ .

На первый взгляд кажется, что данное утверждение доказать несложно. Действительно, удалим для каждого ребра  $e_i$  из разреза  $[S, \bar{S}]$  одну из двух инцидентных этому ребру вершин. Удаляя такую вершину, мы удаляем и все инцидентные ей ребра, в том числе и ребро  $e_i$ . Заметив теперь, что количество таких вершин не превосходит количества ребер в множестве  $[S, \bar{S}]$ , мы, казалось бы, доказываем требуемое неравенство.

Проблема, однако, состоит в том, что удаление таких вершин не всегда приводит к появлению несвязных компонент в графе. Действительно, рассмотрим, к примеру, дерево  $T_n$ , построенное на  $n \geq 2$  вершинах. Понятно, что для него  $\lambda(T_n) = \kappa(T_n) = 1$ . Удаление любого ребра  $e$  приводит к появлению двух компонент связности в графе  $T_n - e$ . Однако, удаляя в этом графе произвольный лист  $x$ , мы получим односвязный граф  $T_n - x = T_{n-1}$ . Поэтому для доказательства неравенства  $\kappa(G) \leq \lambda(G)$  нам нужно действовать чуть более осторожно.

Именно, в случае, если граф  $G$  — несвязен, либо если он состоит из одной вершины, то, по определению,  $\kappa(G) = \lambda(G) = 0$ . Если граф  $G$  — связан и имеет мост, то  $\lambda(G) = 1$ . Единице равняется в этом случае и вершинная связность. Действительно, либо  $G = K_2$ , и тогда  $\kappa(G) = 1$ , либо одна из двух инцидентных мосту вершин является точкой сочленения.

Наконец, предположим, что  $\lambda(G) \geq 2$ . Удаляя  $\lambda(G) - 1$  ребер, мы получаем связный граф, имеющий мост  $e = \{x, y\}$ . Для любого из  $\lambda(G) - 1$  ребер выберем инцидентную ему вершину, отличную от  $x$  и  $y$ . Если удаление таких вершин приведет к несвязному графу, то  $\kappa(G) \leq \lambda(G) - 1$ . В противном случае у нас останется мост  $\{x, y\}$ . Удаление одной из вершин  $x, y$  приведет либо к потере связности, либо к тривиальному графу  $K_1$ . В обоих случаях мы получаем, что  $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ .  $\square$

**6.2.2.** Таким образом, мы для произвольных графов доказали справедливость цепочки неравенств

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G).$$

Простейший пример графа  $G$ , для которого эти неравенства являются строгими, показан на рис.32. Действительно, в таком графе  $\kappa(G) = 1$ ,  $\lambda(G) = 2$ , а  $\delta(G) = 3$ . Для полного графа, с другой стороны, все эти числа одинаковы и равны  $(n - 1)$ .

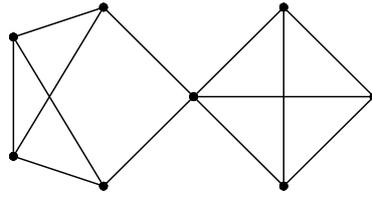


Рис. 32

## 7 Двусвязные графы

**7.1.** Вернемся к описанию вершинно односвязных графов. Все множество таких графов можно разбить на два блока, отнеся к первому блоку графы с  $\kappa(G) = 1$ , а ко второму блоку — все двусвязные графы. Мы знаем, что двусвязный граф — это граф, в котором отсутствуют точки сочленения. Исследуем вначале структуру графов с  $\kappa(G) = 1$ .

**7.1.1.** Напомним, что множество вершин любого графа  $G$  естественным образом разбивается на блоки — компоненты связности такого графа. Оказывается, что в случае  $\kappa(G) = 1$  мы можем разбить на блоки множество  $E(G)$  ребер графа  $G$ , введя очень полезное отношение похожести.

**Определение 7.1.** Два ребра называются *похожими*, если они либо совпадают (то есть любое ребро похоже на само себя), либо входят в один и тот же простой цикл.

**Лемма 7.2.** *Отношение похожести в связном графе  $G$  есть отношение эквивалентности.*

**Доказательство.** Рефлексивность и симметричность такого отношения очевидны, так что нам остается проверить транзитивность. Пусть ребра  $e_1, e_2$  входят в простой цикл  $C_1$ , а ребра  $e_2, e_3$  — в простой цикл  $C_2$  графа  $G$ . Возьмем ребро  $e_1$  и будем идти от него вдоль цикла  $C_1$  в двух противоположных направлениях до тех пор, пока не дойдем до вершин  $x$  и  $y$ ,  $x \neq y$ , принадлежащих циклу  $C_2$  (смотри рисунок 33). Такие вершины обязательно найдутся хотя бы потому, что ребро  $e_2$  входит в цикл  $C_2$ , так что две инцидентные этому ребру вершины обязательно этому циклу  $C_2$  принадлежат. Заметим теперь, что вершины  $x$  и  $y$  разбивают цикл  $C_2$  на два простых пути, соединяющих данные вершины. Один из этих простых путей содержит ребро  $e_3$ . Объединяя этот простой путь с куском цикла  $C_1$ , содержащим ребро  $e_1$  и ограниченным вершинами  $x$  и  $y$ , получим простой цикл  $C$ , содержащий ребра  $e_1$  и  $e_3$ . Тем самым мы доказали, что ребра  $e_1$  и  $e_3$  похожи.  $\square$

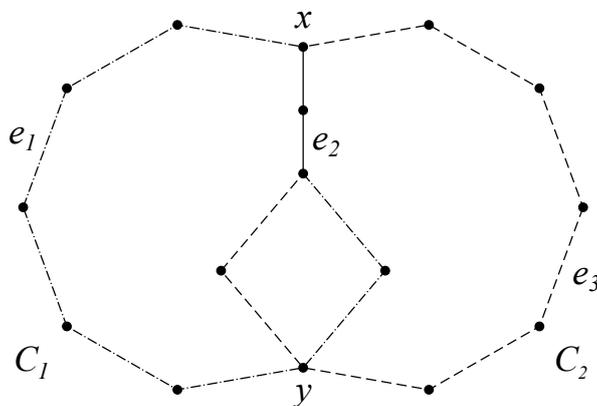


Рис. 33

**7.1.2.** Отношение похожести, как и любое отношение эквивалентности, разбивает множество  $E(G)$  ребер на классы эквивалентности, называемые *блоками* связного графа  $G$ . Каждый такой блок представляет собой либо простое ребро  $K_2$ , либо максимальный по включению блок, состоящий из нескольких ребер, любые два из которых принадлежат некоторому простому циклу. Оказывается, что такая группа ребер есть не что иное, как двусвязный подграф графа  $G$ . Именно, справедлива

**Теорема 7.3.** Пусть  $G$  есть связный граф, построенный на  $n \geq 3$  вершинах. Следующие три утверждения равносильны:

- (1) граф  $G$  является двусвязным;
- (2) любые два ребра этого графа принадлежат некоторому циклу  $C$ ;
- (3) для любых двух вершин графа  $G$  существует цикл  $C$ , проходящий через эти вершины.

**Доказательство.** Предположим вначале, что граф  $G$  является двусвязным. Заметим сразу же, что в силу неравенства  $\lambda(G) \leq \delta(G)$  степень любой вершины в таком графе больше или равна двум. Рассмотрим теперь произвольную вершину  $x \in V(G)$ , а также два произвольных инцидентных этой вершине ребра  $e_1 = \{x, y\}$  и  $e_2 = \{x, z\}$ . Так как граф  $G - x$  является связным, то существует простой путь  $P$ , соединяющий вершины  $y$  и  $z$ . Объединяя путь  $P$  с ребрами  $e_1$  и  $e_2$ , получаем простой цикл  $C$  в графе  $G$ .

Таким образом, любые два ребра, инцидентные одной и той же вершине двусвязного графа, принадлежат одному и тому же циклу. Иными словами, эти два ребра являются похожими. Но отношение похожести транзитивно, поэтому из похожести любых двух соседних ребер следует похожесть любых двух ребер графа  $G$ .

Пусть теперь любые два ребра графа  $G$  принадлежат некоторому циклу  $C$ . Выберем любые две вершины  $x_1, x_2$  нашего графа и рассмотрим два различных ребра  $e_1$  и  $e_2$ , инцидентных этим вершинам. В силу неравенства  $n \geq 3$  такие ребра обязательно найдутся. Цикл  $C$ , содержащий ребра  $e_1$  и  $e_2$ , обязательно проходит через выбранные нами вершины  $x_1$  и  $x_2$ .

Последнее, что осталось — это доказать, что если через любые две вершины графа  $G$  проходит цикл  $C$ , то граф является двусвязным, то есть не содержит точек сочленения. А это утверждение достаточно очевидно. Действительно, пусть такой граф содержит точку сочленения  $x \in V(G)$ . Обозначим через  $G_1$  и  $G_2$  две компоненты связности, полученные в результате удаления вершины  $x$ , а через  $y_1 \in G_1$  и  $y_2 \in G_2$  — пару вершин, смежных вершине  $x$  в исходном графе. Так как в графе  $G - x$  нет пути, соединяющего вершины  $y_1$  и  $y_2$ , то и в исходном графе  $G$  нет цикла, проходящего через эти вершины. Полученное противоречие доказывает нашу теорему.  $\square$

**7.1.3.** Итак, с помощью отношения похожести мы разбили ребра графа  $G$  с  $\kappa(G) = 1$  на блоки (рис.34,а), каждый из которых представляет собой либо мост, либо максимальный по включению (то есть не содержащийся ни в каком большем подграфе) двусвязный подграф графа  $G$ . Эти блоки соединены между собой точками сочленения (черные вершины на рис.34,а).

Используя описанное выше разбиение, по графу  $G$  можно построить двудольный граф  $B(G)$  (рис.34,б), описывающий блочную структуру исходного графа  $G$ . Одна доля графа  $B(G)$  состоит из точек  $x_j$  сочленения графа  $G$  (черные вершины на рис.34,б), а вторая — из вершин  $b_i$ , каждая из которых отвечает некоторому блоку  $B_i$  исходного графа  $G$  (светлые вершины на рис.34,б). Вершины  $x_j$  и  $b_i$  соединятся в графе  $B(G)$  ребром в случае, если в исходном графе вершина  $x_j$  принадлежала блоку  $B_i$ .

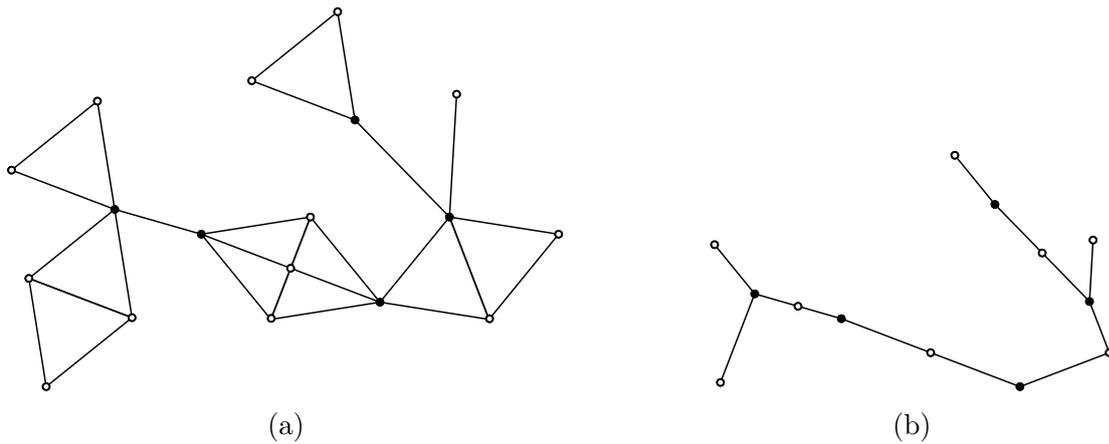


Рис. 34

Понятно, что в построенном таким образом двудольном графе  $B(G)$  циклов быть не может, то есть граф  $B(G)$  является деревом. Это дерево называется деревом блоков и точек сочленения исходного графа  $G$ . Любая точка сочленения обязательно является внутренней вершиной дерева  $B(G)$ , тогда как вершины  $b_i$ , отвечающие блокам дерева  $G$ , могут быть как внутренними вершинами  $B(G)$ , так и его листьями. Блок, отвечающий листу дерева  $B(G)$ , называется крайним блоком графа  $G$ . Понятно, что блок графа  $G$  является крайним тогда и только тогда, когда он содержит только одну точку сочленения графа  $G$ .

**7.2.** Опишем алгоритм поиска точек сочленения в односвязном графе, линейный по количеству вершин и ребер в графе. Данный алгоритм был предложен в 1973 году Джоном Хопкрофтом и Робертом Тарьяном и базируется на алгоритме обхода графа в глубину.

**7.2.1.** Пусть  $G$  есть простой односвязный граф. В результате алгоритма поиска в глубину мы получаем дерево  $T(G)$  обхода графа с корнем в вершине  $x_0$  — вершине, с которой мы начинаем обход графа (рис.35). Как мы знаем, в результате работы алгоритма все ребра графа разбиваются на два класса — ребра, принадлежащие дереву обхода (ребра, помеченные синим цветом на рис.35), а также ребра, дереву не принадлежащие (ребра, помеченные черным цветом на рис.35) — так называемые обратные ребра. При этом, в силу нормальности такого дерева, один из концов обратного ребра обязательно лежит на пути, соединяющем второй конец с корнем  $x_0$  остовного дерева.

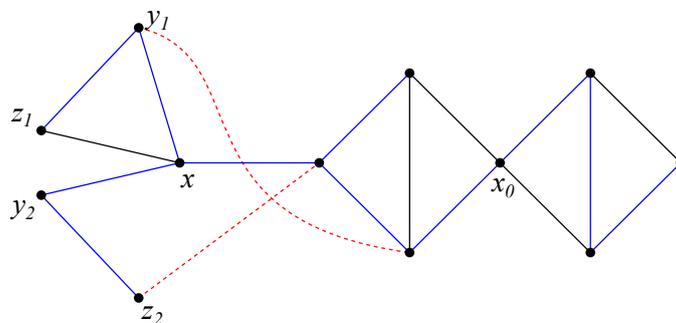


Рис. 35

Достаточно очевидно, что корень  $x_0$  дерева  $T(G)$  является точкой сочленения тогда и только тогда, когда он имеет два или более потомка в дереве обхода (см. вершину  $x_0$  на рис.35).

Действительно, после удаления  $x_0$  смежные с  $x_0$  вершины, являющиеся потомками  $x_0$  в дереве  $T(G)$ , оказываются в разных компонентах связности графа  $G - x_0$ . Для того, чтобы понять, в каком случае вершина  $x \neq x_0$  является точкой сочленения, рассмотрим подмножество  $y_i$  непосредственных потомков (детей) вершины  $x$  в дереве  $T(G)$  обхода графа  $G$  (см.рис.35). Предположим, что *хотя бы для одной* вершины  $y_i$  обратные ребра, исходящие из поддерева  $T_i$  с корнем в вершине  $y_i$ , либо вовсе отсутствуют (вершина  $y_2$  на рис.35), либо оканчиваются в вершине  $x$  или в вершинах самого поддерева  $T_i$  (вершина  $y_1$  на рис.35). В этом случае при удалении  $x$  граф  $G$  разваливается как минимум на две компоненты связности, то есть  $x$  является точкой сочленения. Если же в  $G$  существовали бы обратные ребра, исходящие, например, из точек  $z_2$  и  $y_1$  и входящие в предки вершины  $x$  (см. пунктирные ребра, помеченные красным цветом на рис.35), то вершина  $x$  точкой сочленения бы не являлась.

**7.2.2.** Описанные выше наблюдения можно положить в основу алгоритма поиска точек сочленения. Именно, будем обходить граф  $G$  в глубину, пометая вершины графа в порядке этого обхода натуральными числами  $k(x)$  из диапазона от 1 до  $n = |V(G)|$ . Наряду с  $k(x)$  введем для каждой вершины графа функцию  $l(x)$  следующим образом. Для стартовой вершины  $x_0$  с  $k(x_0) = 1$  положим  $l(x_0) = 1$ . Для всех остальных вершин  $l(x)$  определим следующим образом:

$$l(x) = \min \begin{cases} k(x), \\ l(y_i), & \text{где } y_i \text{ — непосредственные потомки вершины } x \text{ в дереве } T(G), \\ k(z_j), & \text{где } z_j \text{ — предки вершины } x \text{ в } T(G), \text{ соединенные с } x \text{ обратным ребром в } G. \end{cases}$$

Функция  $l(x)$  для вершины  $x$  может быть сосчитана только лишь после посещения всех вершин, являющихся потомками  $x$  в дереве  $T(G)$ .

Предположим теперь, что вершина  $x \neq x_0$  является точкой сочленения. Это означает, что среди непосредственных потомков  $y_i$  вершины  $x$  в дереве  $T(G)$  найдется хотя бы одна вершина  $y_i$ , для которой все исходящие из вершин поддерева  $T_{y_i}$  обратные ребра не поднимаются выше вершины  $x$  в дереве  $T(G)$ . Тогда, как видно из определения функции  $l$ , значения  $l$  на вершинах поддерева  $T_{y_i}$  ограничены снизу значением  $k(x)$ .

Наоборот, пусть вершина  $x \neq x_0$  не является точкой сочленения. В таком случае для любого поддерева  $T_{y_i}$  найдется исходящее из него обратное ребро  $\{v, z\}$ ,  $v \in T_{y_i}$ , приходящее в некоторую вершину  $z$ , являющуюся предком  $x$  в дереве  $T(G)$ . Наличие такого ребра  $\{v, z\}$ , в свою очередь, означает, что величина  $l(v)$  оказывается меньше  $k(x)$ . Теперь остается заметить, что при движении по дереву  $T_{y_i}$  от вершины  $v$  к корню значения функции  $l$  могут разве что уменьшиться. Как следствие, в рассматриваемом случае мы имеем неравенство  $l(y_i) < k(x)$  для любого непосредственного потомка  $y_i$  вершины  $x$ .

Таким образом, мы доказали, что вершина  $x \neq x_0$  является точкой сочленения тогда и только тогда, когда хотя бы для одного из ее потомков  $y_i$  значение  $l(y_i)$  оказывается большим или равным номеру  $k(x)$  вершины  $x$ :

$$\text{if } \exists y_i: \quad l(y_i) \geq k(x), \quad \text{then } x \neq x_0 \text{ is a cut point.}$$

Для корневой вершины  $x_0$  достаточно подсчитать количество ее потомков в дереве  $T(G)$ . Если это количество больше единицы, то  $x_0$  является точкой сочленения.

Результаты работы описанного выше алгоритма для графа  $G$  из рис.35 показаны на рис.36. Вершины этого графа помечены числами от 1 до 12 в порядке обхода этих вершин поиском в

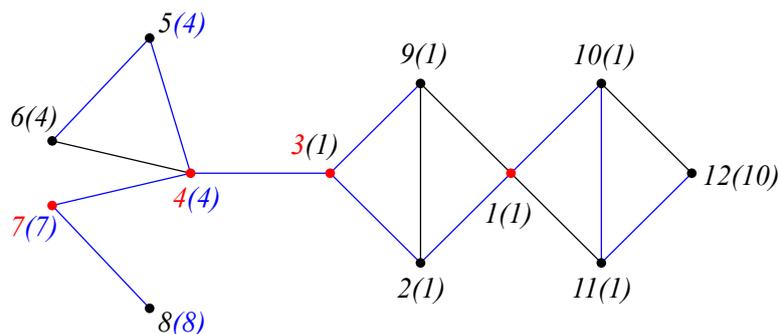


Рис. 36

глубину. В скобках для каждой вершины  $i$  стоит соответствующее ей число  $l(i)$ . Красным цветом на этом рисунке помечены точки сочленения графа  $G$ . Действительно, у вершины 7 имеется потомок — вершина 8, значение  $l(8) = 8$  которой больше номера вершины 7. Аналогичный факт справедлив для вершин 4 и 3 — у них имеются непосредственные потомки  $y_i$  с  $l(y_i)$ , большими или равными номерам этих вершин. Наконец, у вершины 1 имеются два потомка в дереве  $T(G)$ , так что 1 есть точка сочленения  $G$ .

**7.3.** Ранее мы достаточно подробно описали структуру графов с  $\kappa(G) = 1$ . Постараемся теперь понять структуру вершинно двусвязного графа.

**7.3.1.** Оказывается, существует достаточно удобный конструктивный способ построения вершинно двусвязного графа — любой такой граф может быть построен из некоторого цикла  $C = P_0$  последовательным добавлением к нему так называемых ручек  $P_i$ .

**Определение 7.4.** Пусть  $H$  есть некоторый подграф графа  $G$ . Ручкой подграфа  $H$  в графе  $G$  называется простой путь  $P$ , концы которого принадлежат  $H$ , а все внутренние вершины которого этому подграфу не принадлежат (смотри рис.37,а).

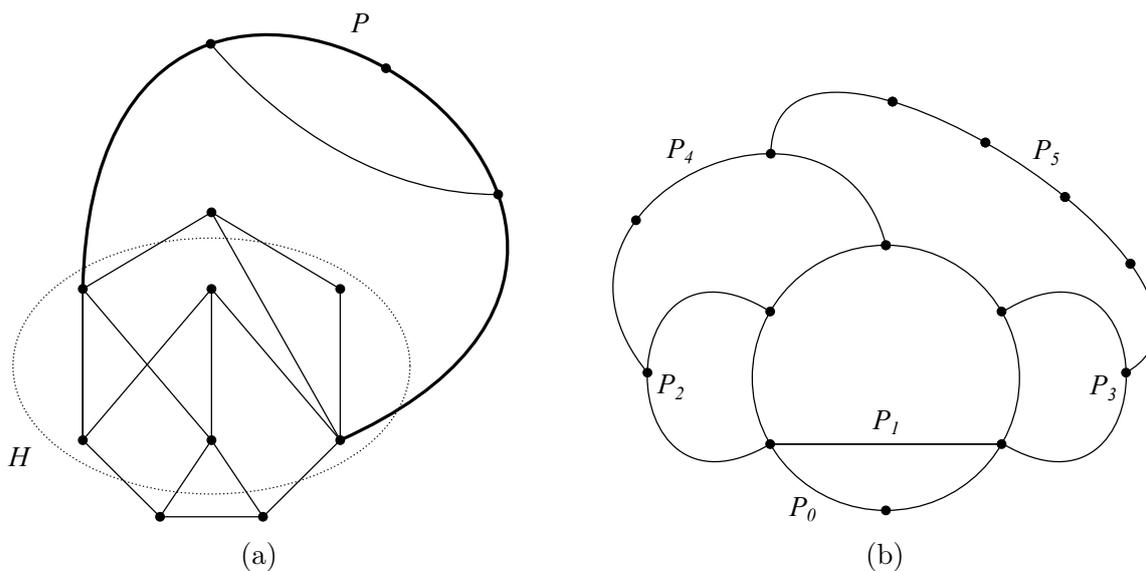


Рис. 37

**Определение 7.5.** Разложением графа  $G$  на ручки называется последовательность  $P_0, \dots, P_k$  подграфов графа  $G$ , такая, что  $P_0$  представляет собой цикл,  $P_i$  для любого  $i = 1, \dots, k$  пред-

ставляет собой ручку для подграфа  $G_{i-1} = P_0 \cup \dots \cup P_{i-1}$  графа  $G$ , а  $G_k$  совпадает с исходным графом  $G$  (смотри рис.37,b).

**Утверждение 7.6.** *Граф  $G$  является двусвязным тогда и только тогда, когда он допускает разложение  $G$  на ручки, начинающиеся с произвольного цикла в этом графе.*

**Доказательство.** Пусть граф  $G$  допускает разложение на ручки. Так как цикл  $P_0$  является двусвязным графом, то нам достаточно показать, что добавление к графу  $G$  ручки  $P$  двусвязность графа  $G \cup P$  не нарушит. Обозначим через  $x$  и  $y$  концевые вершины пути  $P$ . Заметим, что добавление ребра  $\{x, y\}$  к графу  $G$  двусвязность не нарушит. Теперь заметим, что  $P$  представляет собой подразбиение ребра  $\{x, y\}$  вершинами степени 2, а любое такое подразбиение также не нарушает двусвязность графа. Действительно, мы показали, что граф  $G$  двусвязен тогда и только тогда, когда любые два ребра принадлежат некоторому циклу, а последнее свойство, очевидно, в процессе подразбиения ребра  $\{x, y\}$  не меняется.

Обратно, пусть  $G$  является двусвязным графом,  $C$  — произвольный цикл в нем. Построим разложение на ручки графа  $G$ , начиная с цикла  $C = P_0$ . Для этого рассмотрим граф  $G_i$ , полученный добавлением  $i$  ручек. Если  $G_i \neq G$ , то в  $G$  найдется ребро  $e \in G - E(G_i)$ , а также ребро  $e' \in E(G_i)$ . Так как граф  $G$  двусвязный, то эти ребра принадлежат некоторому общему циклу. Обозначим через  $P$  ту часть этого цикла, которая содержит ребро  $e$ , а также ровно две вершины  $x, y \in V(G_i)$ . По отношению к  $G_i$  путь  $P$  является ручкой. Продолжая далее, мы и получим разложение  $G$  на ручки.

**7.3.2.** Перейдем теперь к описанию реберно двусвязных графов. Мы знаем, что любой реберно двусвязный граф — это связный граф, не содержащий мостов. Такое описание имеет один недостаток — оно показывает нам, чего в графе быть не должно для того, чтобы он был реберно двусвязным. Нам же часто нужно более конструктивное описание такого графа, похожее на то, что мы только что дали для вершинно двусвязного графа.

Заметим, прежде всего, что в силу неравенства  $\kappa(G) \leq \lambda(G)$  любой вершинно двусвязный граф является одновременно и реберно двусвязным графом. Обратное, однако же, неверно. На рис.38 в качестве примера показан граф “бабочка”, являющийся реберно двусвязным, но имеющим точку сочленения  $x$ . Иными словами, реберно двусвязных графов больше, нежели чем вершинно двусвязных графов. Как следствие, декомпозиция реберно двусвязного графа должна быть несколько более сложной по сравнению с декомпозицией вершинно двусвязного графа.

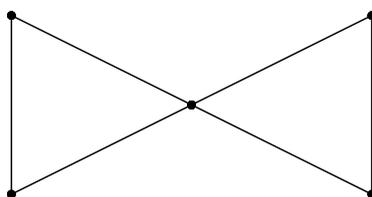


Рис. 38

Как видно из рис.38, реберно двусвязный подграф может содержать один или несколько циклов, имеющих с оставшейся частью графа только лишь одну общую точку. Такого рода цикл называется *замкнутой ручкой*. В упражнении ?? предлагается доказать, что любой реберно двусвязный граф можно разложить на ручки и замкнутые ручки, начиная с произвольного замкнутого цикла  $C$  в исходном графе.

**7.4.** В принципе, при рассмотрении связности в графах наличие петель и/или мультиребер на вершинную связность графа никак не влияет. Однако в некоторых разделах теории графов, например, при изучении планарных графов, оказывается полезным ввести некоторые дополнительные понятия, полезные при изучении мультиграфов.

**Определение 7.7.** Под разделением связного мультиграфа  $G$  понимают такую декомпозицию  $G$  на два непустых связных подграфа  $G_1$  и  $G_2$ , при которой у них имеется только одна общая вершина  $x$ . Сама эта общая вершина называется разделяющей вершиной графа  $G$ .

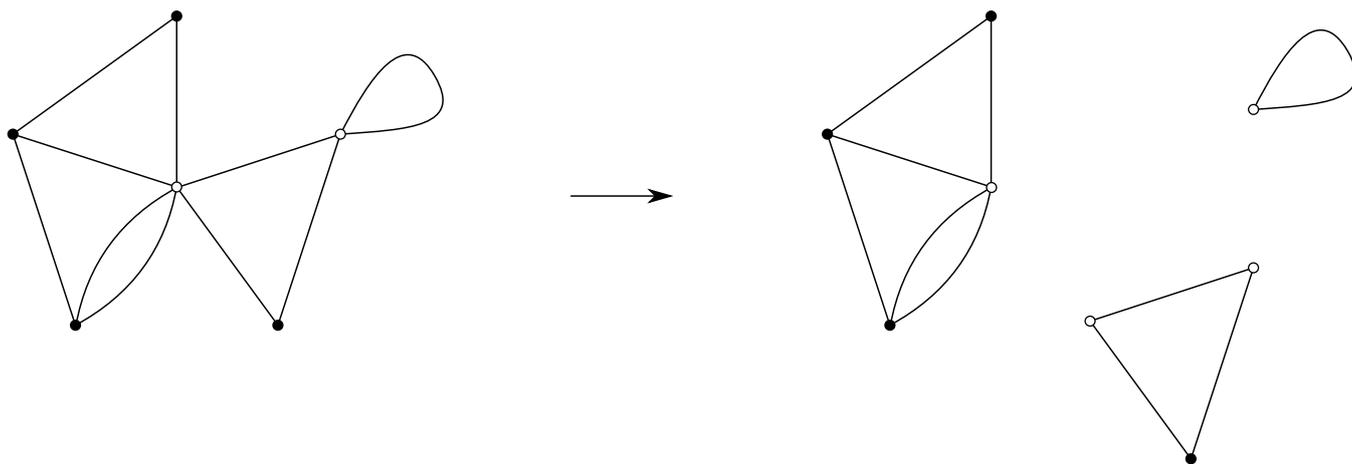


Рис. 39: Разделяющие вершины мультиграфа  $G$

Ясно, что любая точка сочленения является разделяющей вершиной любого графа  $G$ . Обратное, однако, неверно — любая вершина мультиграфа  $G$ , инцидентная петле и еще хотя бы одному ребру, является разделяющей вершиной  $G$  (см.рис.39, на котором белым цветом помечены две разделяющие вершины).

**Определение 7.8.** Связный граф  $G$  называется неразделяемым, если в нем отсутствуют разделяющие вершины. В противном случае  $G$  называется разделяемым графом.

С точностью до изоморфизма существуют лишь два неразделяемых графа, построенных на одной вершине — граф  $K_1$  и граф  $K_1$  с добавленной петлей. Граф  $K_1$  с добавленными  $k$  петлями в случае  $k > 1$  является разделяемым. Заметим также, что в любых неразделяемых графах на  $n > 1$  вершинах петли отсутствуют.

В случае  $n \geq 3$  любой неразделяемый граф является двусвязным. Как следствие, теорема 7.3 для таких графов также оказывается справедливой. Кроме того, для всех неразделяемых графов, отличных от  $K_1$  и  $K_2$  (а значит, и для  $K_1$  с петлей, а также для  $K_2$  с кратными ребрами) остается справедливым утверждение 7.6 о разложении графа на ручки. Наконец, описанный выше алгоритм разбиения связного графа  $G$  на блоки и точки сочленения естественным образом обобщается на случай мультиграфов. Вместо блоков в таком разложении следует брать максимальные по включению неразделяемые подграфы графа  $G$ , а вместо точек сочленения — разделяющие вершины мультиграфа  $G$ .

**7.5.** Заметим, в заключение, что понятие вершинной и реберной связности достаточно естественно переносится и на случай ориентированных графов. Так, например, вершинным разрезом называется подмножество  $S \subset V(D)$  вершин орграфа  $D$ , такое, что при удалении  $S$  орграф

$D$  перестает быть сильно связным, а мощность минимального из таких подмножеств называется вершинной связностью орграфа  $D$ .

Оказывается, что сильно связные орграфы в определенном смысле эквивалентны реберно двусвязным неориентированным графам. Именно, в упражнении ?? предлагается доказать следующее утверждение.

**Утверждение 7.9** (Robbins, 1939). *Граф  $G$  допускает сильную ориентацию тогда и только тогда, когда он является реберно двусвязным графом.*

## 8 $k$ -связные графы. Теорема Менгера

**8.1.** В предыдущих параграфах мы довольно подробно изучили структуру односвязных и двусвязных графов. Можно этот процесс продолжать, пытаясь описывать 3-связные, 4-связные и т.д. графы. При этом с ростом  $k$  структура  $k$ -связных графов становится все сложнее. Оказывается, однако, что любой  $k$ -связный граф при  $k \geq 3$  обладает целым рядом базовых свойств, характерных и для 2-связных графов. И основной результат такого рода — это альтернативное описание  $k$ -связного графа на языке путей, связывающих любые две вершины в таком графе.

**8.1.1.** Вернемся ненадолго к двусвязным графам. Теорема 7.3 утверждает, что в двусвязном графе  $G$  через любые две вершины  $x, y$  графа проходит хотя бы один простой цикл. Но любой такой цикл представляет собой, по сути, два простых пути, соединяющих  $x$  и  $y$  и не пересекающихся между собой ни в одной из своих внутренних вершин. Иными словами, мы можем переформулировать теорему 7.3 следующим образом.

**Следствие 8.1** (Whitney, 1932). *Граф  $G$ , построенный на трех или более вершинах, является двусвязным тогда и только тогда, когда для любой пары  $x, y$  его вершин найдутся два простых пути, соединяющих  $x$  и  $y$  и не имеющих общих внутренних вершин.*

Отмеченное свойство можно рассматривать и как альтернативное определение двусвязного графа, а именно, называть граф  $G$  двусвязным в случае, если для любой пары его вершин найдется по крайней мере два простых пути, соединяющих эти вершины и не имеющих общих внутренних вершин.

**8.1.2.** Оказывается, что аналогичный результат имеет место и для произвольного  $k$ -связного графа.

**Теорема 8.2** (Уитни, 1932). *Простой граф  $G$  является  $k$ -связным тогда и только тогда, когда между любыми двумя его вершинами  $x$  и  $y$  существует  $k$  путей, не имеющих общих внутренних вершин.*

Доказательство этой теоремы базируется, в свою очередь, на одном из наиболее фундаментальных результатов теории графов — теореме, доказанной австрийским математиком Карлом Менгером в 1927 году.

**Определение 8.3.** Пусть  $\{x, y\}$  есть пара различных вершин графа  $G$ . Подмножество  $R$  множества  $V(G) \setminus \{x, y\}$  называется вершинно разделяющим  $x$  и  $y$  множеством, если в графе  $G - R$  пути между  $x$  и  $y$  отсутствуют.

**Теорема 8.4** (Менгер, 1927). Пусть  $x, y \in V(G)$  — две несмежные вершины графа  $G$ . Тогда количество  $\kappa(x, y)$  вершин в наименьшем вершинном разделяющем  $x$  и  $y$  множестве совпадает с наибольшим количеством простых путей из  $x$  в  $y$ , не имеющих общих внутренних вершин.

**Замечание 8.5.** Теорема Менгера характеризует, как говорят, локальную связность графа — она говорит о том, сколько вершин нужно удалить в графе  $G$  с тем, чтобы разорвать в этом графе вершины  $x$  и  $y$ . С этой точки зрения теорема Уитни имеет глобальный характер — она описывает связность графа в целом на языке путей, соединяющих в этом графе две произвольные вершины.

**8.1.3.** Давайте вначале докажем теорему Уитни в предположении, что теорема Менгера верна.

Заметим, прежде всего, что в одну сторону утверждение теоремы Уитни очевидно — если между любыми двумя вершинами простого графа существует  $k$  не имеющих общих внутренних вершин путей, то в таком графе имеется как минимум  $k + 1$  вершина, и в нем не существует разделяющего множества, содержащего менее, чем  $k$  вершин. Поэтому такой граф  $k$ -связен.

Теперь предположим, что граф  $G$  является  $k$ -связным. Если вершины  $x$  и  $y$  несмежны, то существование  $k$  путей между ними сразу следует из теоремы Менгера. Поэтому далее будем рассматривать случай, когда в графе  $G$  существует ребро  $e = \{x, y\}$ . Рассмотрим тогда граф  $G - e$ . Покажем, что связность  $\kappa(G - e)$  такого графа уменьшается не более чем на единицу по сравнению со связностью  $\kappa(G)$  исходного графа.

Действительно, так как любое вершинно разделяющее множество  $S$  графа  $G$  является вершинно разделяющим множеством графа  $G - e$ , то  $\kappa(G - e) \leq \kappa(G)$ . Строгое неравенство  $\kappa(G - e) < \kappa(G)$  имеет место в случае, когда в  $G - e$  найдется вершинно разделяющее множество  $S$ , мощность  $|S| = \kappa(G - e)$  которого строго меньше  $\kappa(G)$ . В этом случае  $S$  не является вершинно разделяющим множеством в  $G$ , граф  $G - S$  является связным, граф  $G - S - e$  имеет две компоненты связности  $G[X]$  и  $G[Y]$ , такие, что  $x \in X$ ,  $y \in Y$ , и в графе  $G - S$  ребро  $e$  является мостом. Если теперь  $|X| > 1$ , то  $S \cup \{x\}$  является вершинно разделяющим множеством в  $G$ , так что  $|S| + 1 = \kappa(G - e) + 1 \geq \kappa(G)$ . Аналогичная ситуация имеет место в случае, когда  $|Y| > 1$ . Наконец, в случае  $|X| = |Y| = 1$  имеем  $|S| = \kappa(G - e) = n - 2$ ,  $\kappa(G) \geq n - 1$ , а значит  $G = K_n$ . Но и для этого случая  $\kappa(G - e) = n - 2 = \kappa(G) - 1$ , что и требовалось доказать.

Итак, связность  $\kappa(G - e)$  графа  $G - e$  больше или равна  $\kappa(G) - 1$ . Как следствие, любое вершинно разделяющее  $x$  и  $y$  множество  $R$  содержит как минимум  $\kappa(G) - 1$  вершину. Тогда, на основании теоремы Менгера, между  $x$  и  $y$  имеется по меньшей мере  $\kappa(G) - 1$  простых путей, не имеющих общих внутренних вершин. Вместе с ребром  $e$  они образуют  $k$  путей, соединяющих  $x$  и  $y$  в исходном графе  $G$  и не имеющих общих внутренних вершин. Теорема Уитни доказана.

**8.1.4.** Вернемся к теореме Менгера. Изначальное ее доказательство было довольно сложным и громоздким. За прошедшие годы было предпринято довольно большое количество попыток упростить доказательство получено несколько довольно удачных доказательств этого результата. Мы здесь изложим, пожалуй, наиболее короткое доказательство теоремы Менгера, найденное немецким математиком Франком Гёрингом в 2000 году. Это доказательство базируется на некоторых вспомогательных понятиях и фактах, к изложению которых мы сейчас и перейдем.

**Определение 8.6.** Пусть  $X, Y \subset V(G)$ . Путем между  $X$  и  $Y$  называется любой простой путь  $P$ , начальная вершина которого принадлежит множеству  $X$ , конечная — множеству  $Y$ , а все внутренние вершины не принадлежат ни множеству  $X$ , ни множеству  $Y$ .

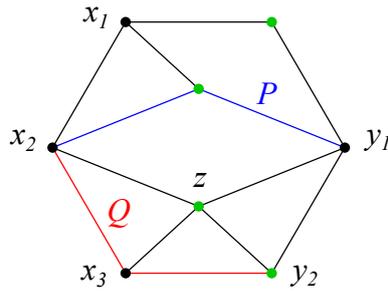


Рис. 40

В качестве примера на рис.40 показаны подмножества  $X = \{x_1, x_2, x_3\}$  и  $Y = \{y_1, y_2\}$  вершин графа  $G$ , а также простой путь  $P$ , соединяющий  $X$  и  $Y$  (помечен синим цветом на рисунке). Помеченный красным цветом простой путь  $Q$  путем между  $X$  и  $Y$  не является — одна из внутренних вершин этого пути, а именно, вершина  $x_3$ , принадлежит  $X$ , а такая ситуация в определении исключается.

**Замечание 8.7.** Не исключен случай, когда  $X \cap Y \neq \emptyset$ . Поэтому данным определением допускаются и так называемые *тривиальные* пути, каждый из которых состоит из единственной вершины  $x \in X \cap Y$ .

Так, для графа, изображенного на рис.40, мы в качестве  $X$  и  $Y$  можем выбрать подмножества  $X = \{x_1, x_2, x_3, z\}$  и  $Y = \{z, y_1, y_2\}$ . В этом случае путь  $P = (z)$  является тривиальным путем, соединяющим два этих подмножества.

**8.1.5.** Следующее понятие, которое нам понадобится — это понятие вершинного отделяющего множества  $R$ .

**Определение 8.8.** Пусть  $X, Y$  и  $R$  есть некоторые подмножества множества  $V(G)$  вершин. Говорят, что  $R$  отделяет множество  $X$  от множества  $Y$ , если любой путь из  $X$  в  $Y$  проходит через вершины множества  $R$ .

На рис.40 зеленым цветом помечены вершины подмножества  $R$ , отделяющего  $X$  от  $Y$ .

**Замечание 8.9.** Обратим внимание на отличие вершинного отделяющего  $X$  от  $Y$  множества от вершинного разделяющего граф  $G$  множества. При удалении вершинного разделяющего множества граф становится несвязным. От множества, которое отделяет  $X$  от  $Y$ , этого не требуется. Действительно, само множество  $X$  отделяет  $X$  от  $Y$ , а граф  $G - X$  вполне может остаться связным.

**8.1.6.** Обозначим через  $k$  количество вершин в минимальном отделяющем  $X$  от  $Y$  множестве. Как мы уже отмечали ранее,  $X$  всегда отделяет себя от  $Y$  и наоборот. Поэтому  $k \leq \min(|X|, |Y|)$ . В случае, если между  $X$  и  $Y$  пути отсутствуют,  $k = 0$ . В остальных случаях  $k > 0$ .

В качестве примера рассмотрим граф  $G$ , показанный на рис.41. В этом графе в качестве отделяющего  $X = \{x_1, x_2, x_3, z\}$  от  $Y = \{z, y_1, y_2\}$  множества  $R$  можно выбрать подмножество  $Y$ . Возникает вопрос, является ли такое множество минимальным. Следующее утверждение позволяет получить ответ на этот вопрос.

**Теорема 8.10.** Пусть  $X, Y$  — пара подмножеств множества  $V(G)$ . Тогда количество  $k$  вершин в минимальном отделяющем  $X$  от  $Y$  множестве  $R$  совпадает с максимальным количеством  $l$  попарно непересекающихся друг с другом путей из  $X$  в  $Y$ .

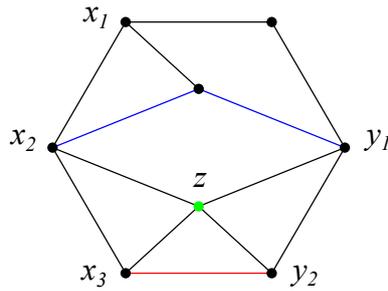


Рис. 41

Так, для множеств  $X = \{x_1, x_2, x_3, z\}$  от  $Y = \{z, y_1, y_2\}$ , показанных на рис.41, имеются три попарно не пересекающиеся между собой пути, соединяющие вершины множества  $X$  с вершинами множества  $Y$  (пути, помеченные синим, красным и зеленым цветами на рисунке). Большее количество путей быть не может — это количество не может превосходить мощность множества  $Y$ . Следовательно, на основании теоремы 8.10, размер минимального отделяющего  $X$  от  $Y$  множества равен трем, так что  $Y$  является минимальным отделяющим  $X$  от  $Y$  множеством.

**8.1.7.** Приступим к доказательству теоремы 8.10. Понятно, что максимальное количество  $l$  попарно непересекающихся путей из  $X$  в  $Y$  не может превосходить количества  $k$  вершин в минимальном отделяющем  $X$  от  $Y$  множестве  $R$  — в противном случае, согласно принципу Дирихле, через какую-то вершину этого множества проходило бы два или более простых путей, чего быть не может. Теорема утверждает, что эти два числа на самом деле равны. Иными словами, нам нужно доказать, что в графе  $G$  обязательно найдутся ровно  $k$  непересекающихся путей из  $X$  в  $Y$ .

Сразу заметим, что в двух тривиальных случаях  $k = 0$  и  $k = 1$  теорема верна. Действительно, случай  $k = 0$  по определению означает, что пути между  $X$  и  $Y$  отсутствуют. В случае, когда минимальное отделяющее  $X$  от  $Y$  множество состоит из одной вершины  $x$ , нам годится любой путь из  $X$  в  $Y$ , проходящий через  $x$ .

Доказательство теоремы в случае  $k > 1$  проведем индукцией по количеству вершин и ребер в графе. В качестве базы индукции мы можем взять граф  $\bar{K}_2$ , состоящий из двух изолированных вершин, в котором  $X = Y = \bar{K}_2$  (рис.42,а). Размер минимального отделяющего  $X$  от  $Y$  множества равен двум (в качестве такого множества необходимо взять множество  $X = Y$ ). Максимальное же количество путей, соединяющих  $X$  и  $Y$ , также равно двум — в качестве таких путей выступают тривиальные пути, состоящие из одной вершины. Таким образом, для данного случая доказываемая нами теорема верна.

Возьмем теперь некоторый граф  $G \neq \bar{K}_2$ , в котором существуют множества вершин  $X$  и  $Y$ , такие, что размер минимального отделяющего  $X$  от  $Y$  множества  $R$  равен  $k > 1$ . Докажем наше утверждение для  $G$ ,  $X$  и  $Y$  при условии, что для всех графов с меньшим количеством вершин и/или ребер теорема 8.10 верна.

Рассмотрим вначале случай, когда в графе  $G$  существует вершина  $z \in X \cap Y$  (см.рис.41). В графе  $G - z$  минимальное отделяющее  $X \setminus \{z\}$  от  $Y \setminus \{z\}$  множество  $R'$  содержит  $k - 1$  вершин. Тогда, по предположению индукции, в  $G - z$  имеется  $(k - 1)$  непересекающийся путь из  $X \setminus \{z\}$  в  $Y \setminus \{z\}$ . Добавляя к этому набору тривиальный путь  $\{z\}$ , получаем набор из  $k$  непересекающихся путей в графе  $G$ .

Теперь разберем случай  $X \cap Y = \emptyset$ . Условие  $k > 0$  означает, что  $X$  и  $Y$  соединены между собой

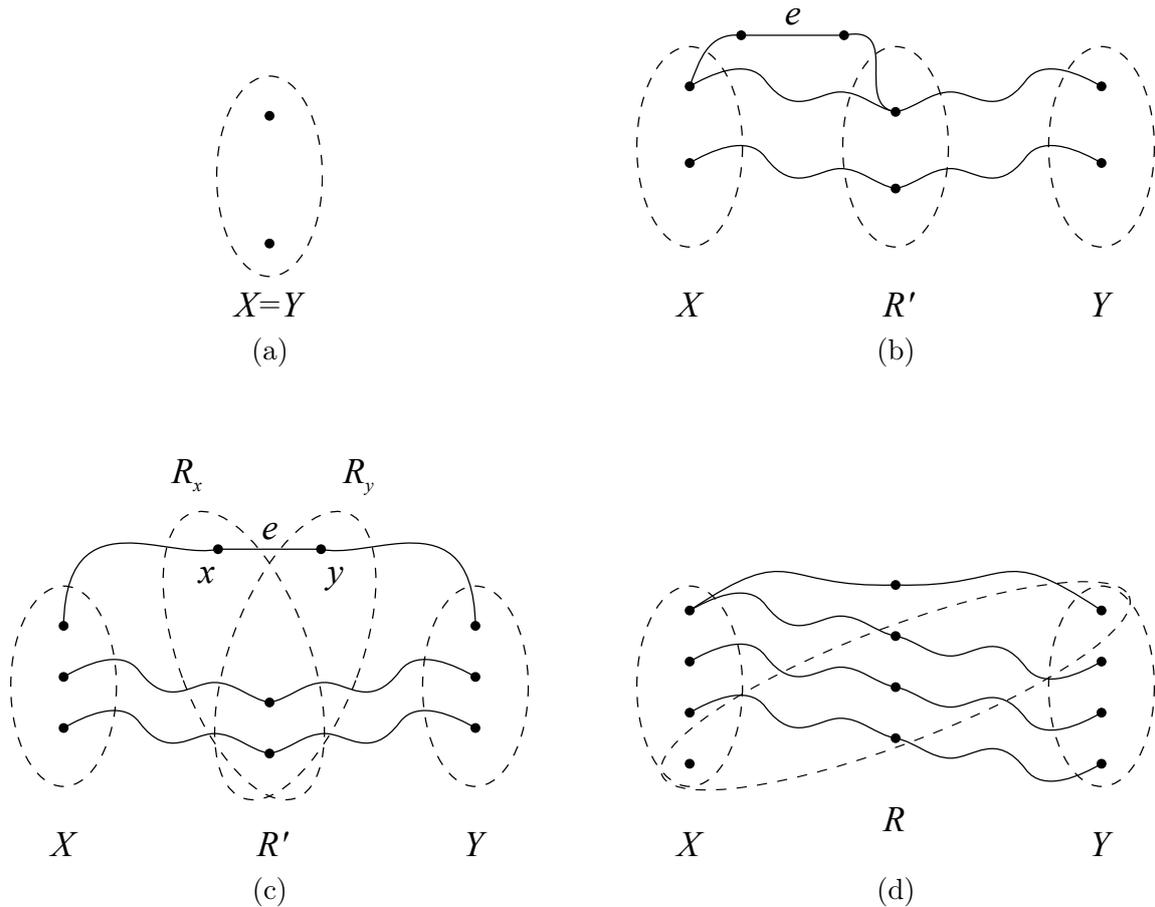


Рис. 42

хотя бы одним путем  $P$ . То, что  $X \cap Y = \emptyset$ , означает, что этот путь будет нетривиальным, то есть он будет содержать хотя бы одно ребро  $e = \{x, y\}$ . При этом, по определению пути между  $X$  и  $Y$ , вершина  $x \notin Y$ , а вершина  $y \notin X$  даже в том случае, когда  $P$  состоит из единственного ребра  $e$ .

Предположим вначале, что при удалении ребра  $e = \{x, y\}$  размер минимального отделяющего  $X$  от  $Y$  множества  $R'$  в графе  $G - e$  не уменьшится по сравнению с размером разделяющего множества  $R$  в графе  $G$  (рис.42,b). Тогда, по индукционному предположению, в графе  $G - e$  найдется  $k$  непересекающихся друг с другом путей из  $X$  в  $Y$ . Добавление же ребра  $e$  это количество путей уменьшить никак не сможет.

Теперь предположим, что при удалении ребра  $e = \{x, y\}$  размер отделяющего  $X$  от  $Y$  множества  $R'$  в графе  $G - e$  уменьшился по сравнению с размером отделяющего  $X$  от  $Y$  множества  $R$  в графе  $G$  (рис.42,c) и стал равным  $k - 1$ . Это, в свою очередь, означает, что множества вершин  $R_x = R' \cup \{x\}$  и  $R_y = R' \cup \{y\}$  отделяют  $X$  от  $Y$  в графе  $G$  и содержат ровно  $k$  вершин. Кроме того, хотя бы одно из множеств  $R_x, R_y$  не совпадает ни с  $X$ , ни с  $Y$ . Действительно, в противном случае  $R' = X \cap Y$ ,  $|R'| = k - 1 \geq 1$ , что противоречит условию  $X \cap Y = \emptyset$ . Иными словами, мы доказали, что в рассматриваемом случае в исходном графе  $G$  обязательно существует отделяющее  $X$  от  $Y$  множество  $R$  мощности  $k$ , не совпадающее ни с  $X$ , ни с  $Y$  (рис.42,d).

Обозначим через  $\bar{X}$  и  $\bar{Y}$  подмножества  $X \setminus R$  и  $Y \setminus R$  соответственно. Так как  $R$  отличен и от  $X$ , и от  $Y$ , то оба эти множества не пусты. Удалим в графе  $G$  все вершины множества  $\bar{Y}$ .

Рассмотрим в получившемся графе  $G'$  множества  $X$  и  $R$ . Эти множества не совпадают, причем  $|X| \geq k$ , а  $|R| = k$ . Любое отделяющее  $X$  от  $R$  множество в графе  $G'$ , если оно существует, содержит не менее, чем  $k$  вершин — в противном случае мы бы и в исходном графе  $G$  смогли отделить  $X$  от  $Y$ , удалив эти вершины. Но тогда, по индукционному предположению, в графе  $G'$  существует  $k$  непересекающихся путей из  $X$  в  $R$ . Аналогично доказывается, что в графе  $G'' = G - \bar{X}$  существует  $k$  непересекающихся путей из  $R$  в  $Y$ . Так как  $|R| = k$ , то мы всегда можем состыковать эти пути с ранее построенными путями из  $X$  в  $R$  и получить искомым набор путей, соединяющих  $X$  и  $Y$  в исходном графе  $G$ .  $\square$

**8.1.8.** Покажем теперь, как, используя теорему 8.10, доказать теорему Менгера. Пусть  $x, y$  — две несмежные вершины графа  $G$ , удовлетворяющие условиям теоремы Менгера. Рассмотрим множество  $X$  вершин, смежных с  $x$ , и множество  $Y$  вершин, смежных с  $y$ . Любое отделяющее  $X$  от  $Y$  множество разделяет вершины  $x$  и  $y$  и наоборот. Следовательно, размер минимального отделяющего  $X$  от  $Y$  множества совпадает с  $\kappa(x, y)$ . Но тогда, согласно теореме 8.10, существует  $k$  попарно непересекающихся путей из  $X$  в  $Y$ . Продолжая эти пути до точек  $x$  и  $y$ , мы тем самым доказываем справедливость теоремы Менгера.

## 9 Теорема Форда-Фалкерсона

**9.1.** Перейдем теперь к реберно  $k$ -связным графам. Как и следовало ожидать, и для таких графов имеет место аналогия как вершинной теоремы Менгера, так и вершинной теоремы Уитни.

**Теорема 9.1** (Реберная теорема Менгера). *Максимальное количество  $\lambda'(x, y)$  реберно непересекающихся простых путей, соединяющих две различные вершины  $x$  и  $y$  связного графа  $G$ , совпадает с размером  $\kappa'(x, y)$  минимального реберно разделяющего вершины  $x$  и  $y$  множества  $R \subset E(G)$ .*

**Теорема 9.2** (Реберная теорема Уитни). *Граф  $G$  является реберно  $k$ -связным тогда и только тогда, когда любые две вершины  $x, y$  этого графа связаны между собой по меньшей мере  $k$  попарно реберно не пересекающимися между собой путями.*

Интересно заметить, что эти утверждения были доказаны лишь в 1956 году как следствия более общего результата — теоремы Форда-Фалкерсона о максимальном потоке в сети. В силу чрезвычайной важности теоремы Форда-Фалкерсона нам также будет полезно вначале сформулировать и доказать этот более общий результат, а затем из него как частный случай получить реберную теорему Менгера (см. упражнение ??) и реберную теорему Уитни.

**9.1.1.** Для того, чтобы сформулировать теорему Форда-Фалкерсона, нам необходимо ввести несколько дополнительных понятий. Начнем с понятия сети.

Сеть можно представлять себе как математическую модель некоторой транспортной системы, доставляющей какой-то продукт (людей, нефть, воду, электричество) из одного места в другое. Если каналы такой системы представить ориентированными ребрами, а промежуточные станции — вершинами, то мы получим некоторый простой слабо связный орграф в качестве математической модели такой транспортной системы (рис.43). Однако такого простого математического объекта нам для полного описания транспортной сети явно не достаточно.

Во-первых, нам для любого канала рассматриваемой транспортной системы нужно указать пропускную способность этого канала как максимальное количество транспортируемого продукта,

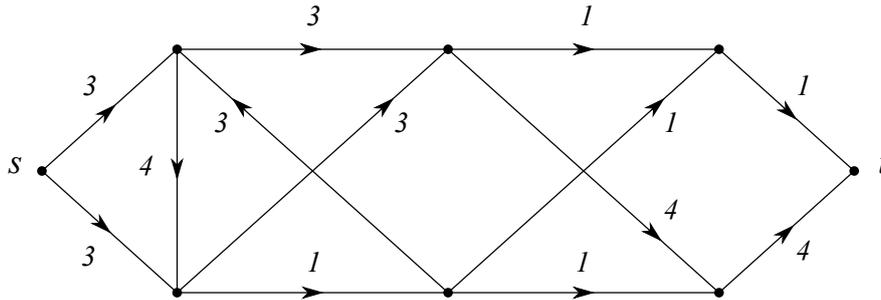


Рис. 43: Сеть с источником  $s$  и стоком  $t$

которое можно пропустить через данный канал в единицу времени (см. числа над ребрами на рис.43). Как следствие, любому ориентированному ребру  $(x, y)$  мы должны приписать некоторое неотрицательное вещественное число  $c(x, y)$ , называемое пропускной способностью этого ребра  $e = (x, y)$ .

Во-вторых, в простейшем случае можно считать, что система сконструирована для передачи продукта из единственного места добычи в единственное же место потребления данного продукта. На языке теории графов это означает, что в орграфе  $D$  имеются две выделенные вершины — источник  $s$  и сток  $t$  (рис.43). Степень входа вершины  $s$  равна нулю, то есть в источник ничего не втекает. Напротив, у вершины  $t$  равна нулю степень выхода — из этой вершины ничего вытекать не должно.

Теперь мы можем дать формальное определение сети.

**Определение 9.3.** Пусть среди вершин простого слабо связного орграфа  $D$  выделены две вершины  $s$  и  $t$ , называемые источником и стоком, такие, что  $\text{indeg}(s) = \text{outdeg}(t) = 0$ . Пусть, кроме того, на множестве  $E \subset V \times V$  ребер орграфа  $D$  определена вещественная неотрицательная функция  $c(x, y)$ . Тогда орграф  $D = (V, E, s, t, c)$  называется *сетью*, а функция  $c(x, y)$  — *пропускной способностью* сети  $D$ .

**9.1.2.** Предположим, что мы через нашу транспортную систему пропускаем какое-то количество  $Q$  продукта в единицу времени из места добычи этого продукта в место его потребления. Это означает, что какая-то часть этого продукта транспортируется через каждый отдельно взятый канал нашей системы. Нам при этом важно, во-первых, следить за тем, чтобы количество продукта, проходящего через каждый отдельно взятый канал, не превосходило максимальной пропускной способности этого канала. Во-вторых, нам нужно следить за тем, чтобы количество прибывающего на каждую промежуточную станцию продукта равнялось количеству исходящего из данной станции продукта, то есть чтобы на каждой станции не нарушался закон сохранения вещества.

Для того, чтобы описать все вышесказанное на языке теории графов, нам нужно ввести понятие потока в сети.

**Определение 9.4.** *Потоком* в сети  $D$  из вершины  $s$  в вершину  $t$  называется неотрицательная вещественная функция, определенная на множестве  $E(D)$  ребер орграфа  $D$  и удовлетворяющая следующим условиям:

1. для любых  $(x, y) \in E(D)$  функция  $f(x, y) \geq 0$  и  $f(x, y) \leq c(x, y)$ ;

2. для любой вершины  $x \in V(D)$ , отличной от  $s$  и  $t$ , справедливо равенство

$$f^+(x) := \sum_{y: (x,y) \in E(D)} f(x,y) = \sum_{z: (z,x) \in E(D)} f(z,x) =: f^-(x),$$

описывающее закон сохранения вещества в сети: количество  $f^+(x)$  вещества, вытекающее из вершины  $x$ , равняется количеству  $f^-(x)$  вещества, втекающего в  $x$ .

Число

$$\text{val}(f) := \sum_{x: (s,x) \in E(D)} f(s,x) = f^+(s),$$

характеризующее количество исходящего из источника  $s$  в единицу времени продукта, называется при этом *величиной* данного потока. В силу закона сохранения потока, эта же величина характеризует количество входящего в сток  $t$  продукта ( $f^+(s) = f^-(t)$ ).

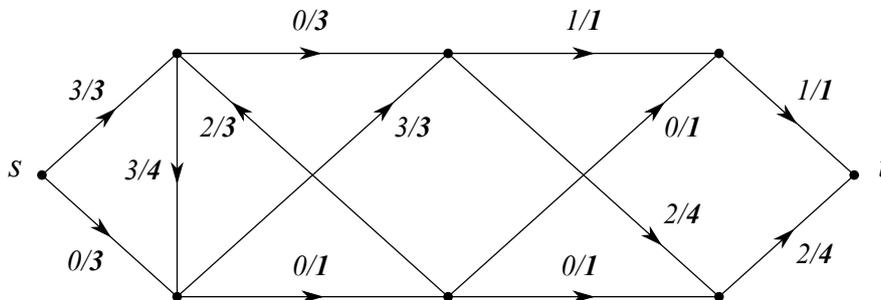


Рис. 44: Поток в сети

В показанной в качестве примера на рис.44 сети нормальным шрифтом помечен поток через каждое ребро, а жирным шрифтом — величина пропускной способности этого ребра.

**9.1.3.** Основной задачей, связанной с потоками в сетях, является задача максимизации потока  $\text{val}(f)$  в заданной сети  $D$ . Можно показать, что эта задача представляет собой задачу линейного программирования. Как и всякая задача линейного программирования, такая задача имеет и двойственную к ней задачу линейного программирования, а именно, задачу о нахождении так называемого *минимального разреза* в сети.

**Определение 9.5.** Пусть  $(S, T)$  есть разбиение множества  $V$  вершин орграфа  $D$  на два блока  $S$  и  $T$ , таких, что вершина  $s \in S$ , а вершина  $t \in T$ . Тогда подмножество ребер

$$R(S, T) := \{e = (x, y) \in E(D) \mid x \in S, y \in T\}$$

называется  $(S, T)$ -разрезом сети  $D$ , а величина

$$\text{cap}(S, T) := \sum_{(x,y) \in R(S,T)} c(x, y)$$

называется *пропускной способностью* данного разреза.

На рис.45 показан пример  $(S, T)$ -разреза в сети (синие ребра на рисунке), пропускная способность которого равна 7.

Нас будут интересовать разрезы, пропускная способность которых минимальна. Любой такой разрез мы и будем называть *минимальным разрезом*.

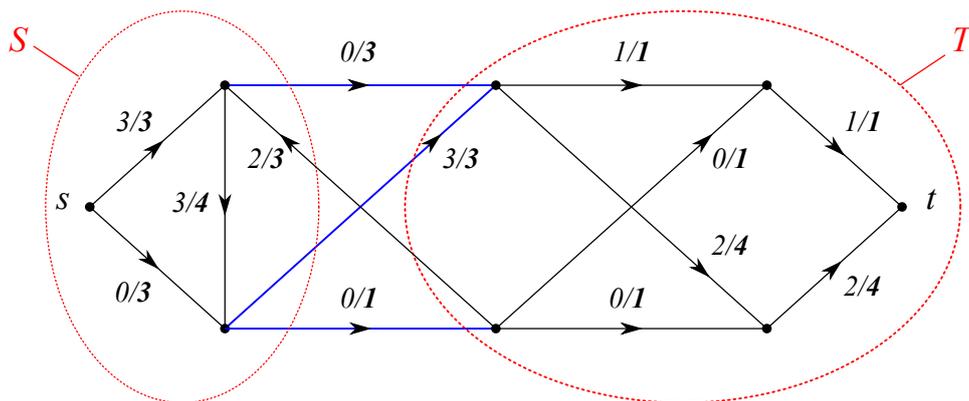


Рис. 45:  $(S, T)$ -разрез в сети

**9.1.4.** Зафиксируем некоторый поток в сети  $D$ . Более-менее очевидно, что величина  $Q$  этого потока не может превосходить пропускной способности *любого* разреза сети  $D$ . Именно, справедлива

**Лемма 9.6** (Слабая двойственность). *Для любого потока  $f$  в сети  $D$  и произвольного  $(S, T)$ -разреза в этой сети имеет место неравенство*

$$\text{val}(f) \leq \text{cap}(S, T). \quad (21)$$

**Доказательство.** Зафиксируем какое-то подмножество  $U$  множества  $V(D)$  сети  $D$ . Обозначим через  $f^+(U)$  суммарный поток на ребрах, исходящих из  $U$ , а через  $f^-(U)$  — суммарный поток на ребрах, входящих в  $U$ . С физической точки зрения  $f^+(U)$  представляет собой количество вещества, вытекающего из  $U$ , а  $f^-(U)$  — количество вещества, втекающего в  $U$ . Покажем, что разность между количеством вытекающего из  $U$  вещества и количеством втекающего в него вещества, характеризующая, по сути, поток вещества через границу  $U$ , равна

$$f^+(U) - f^-(U) = \sum_{u \in U} [f^+(u) - f^-(u)].$$

Посмотрим для этого, какой вклад дает поток  $f(e)$  через некоторое ребро  $e$  в каждую из частей этого равенства. Если  $e$  соединяет две внутренние вершины подмножества  $U$ , то в левую часть  $f(e)$  вклада не дает, а в правой части этот вклад сокращается. В случае, если  $e$  соединяет две внешние по отношению к  $U$  вершины, то вклад от  $f(e)$  отсутствует в обеих частях рассматриваемого равенства. Если  $e$  представляет собой ребро, исходящее из  $U$ , то  $f(e)$  дает одинаковый положительный вклад в каждую из частей нашего равенства, а если  $e$  есть ребро, входящее в  $U$ , то  $f(e)$  дает одинаковый отрицательный вклад в обе части равенства.

Теперь рассмотрим некоторый разрез  $(S, T)$  в сети. Для потока, вытекающего из  $S$ , мы на основании доказанного равенства и законов сохранения ( $f^+(x) = f^-(x)$  для любого  $x \neq s, t$ ) можем записать, что

$$f^+(S) - f^-(S) = f^+(s) = \text{val}(f).$$

Но тогда мы и получаем, что

$$\text{val}(f) = f^+(S) - f^-(S) \leq f^+(S) \leq \sum_{(x,y) \in E(D): x \in S, y \in T} c(x, y) = \text{cap}(S, T).$$

**Следствие 9.7.** *Пусть  $f$  есть поток в сети  $D$ , а  $(S, T)$  — разрез в этой сети, такие, что  $\text{val}(f) = \text{cap}(S, T)$ . Тогда  $f$  представляет собой максимальный поток в сети, а  $(S, T)$  — минимальный разрез в этой сети.*

**9.1.5.** В теории экстремальных задач слабая двойственность (21) используется обычно для того, чтобы получить некоторую верхнюю границу на значения целевой функции (в данном случае, на величину  $\text{val}(f)$ ). Кроме того, как мы уже заметили выше, слабая двойственность может быть использована при доказательстве оптимальности того или иного решения — если в задаче можно найти величину потока в сети, равную пропускной способности некоторого разреза, то в таком случае найденная величина  $\text{val}(f)$  потока гарантированно является оптимальной.

В общем случае вполне возможна ситуация, при которой максимальное значение целевой функции в прямой задаче оказывается строго меньше значения целевой функции в обратной задаче. Однако для рассматриваемого класса задач такая ситуация невозможна — именно, мы сейчас покажем, что если величина  $\text{val}(f)$  потока достигает своего максимального значения, то это значение обязательно совпадает с минимальной пропускной способностью некоторого разреза. В теории экстремальных задач подобного рода результат называется обычно строгой двойственностью.

**Теорема 9.8** (Сильная двойственность; L. R. Ford, D. R. Fulkerson, 1956). *Во всякой сети величина любого максимального потока равна пропускной способности любого минимального разреза.*

**Доказательство.** Предположим, что в сети  $D$  существует максимальный поток  $f$ . Мы покажем, как в этом случае построить в этой сети разрез  $(S, T)$ , пропускная способность которого совпадает с величиной максимального потока. На основании следствия 9.7 это, в свою очередь, означает, что такой разрез является минимальным.

Для этого рассмотрим вместо  $D$  неориентированный граф  $G$ , полученный из исходного орграфа заменой всех ориентированных ребер на неориентированные. Разобьем множество  $V(G)$  вершин этого графа на два блока  $S$  и  $T$  следующим образом. К блоку  $S$  отнесем вершину  $s$ , а также любую вершину  $x \in V(G)$ , для которой существует простой путь  $(s = x_0, x_1, \dots, x_k = x)$  из  $s$  в  $x$ , такой, что любому ребру  $\{x_i, x_{i+1}\} \in E(G)$  данного пути соответствует

- (1) либо ориентированное ребро  $(x_i, x_{i+1})$  графа  $D$ , значение  $f(x_i, x_{i+1})$  на котором строго меньше  $c(x_i, x_{i+1})$  (в этом случае говорят, что ребро  $\{x_i, x_{i+1}\} \in E(G)$  соответствует *ненасыщенному* ребру  $(x_i, x_{i+1}) \in E(D)$ ),
- (2) либо ориентированное ребро  $(x_{i+1}, x_i)$  графа  $D$ , направленное навстречу построенному пути, значение  $f(x_{i+1}, x_i)$  на котором строго больше нуля.

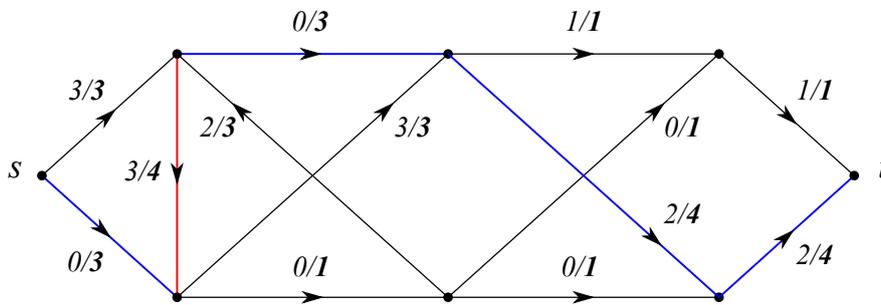


Рис. 46: Поток и дополняющий путь

Покажем теперь, что множество  $T = V \setminus S$  не пусто и, в частности, обязательно содержит вершину  $t$ . Действительно, предположим, что это не так. Тогда в графе  $G$  существует простой путь из  $s$  в  $t$ , все ребра которого удовлетворяют описанным выше свойствам (1)-(2) — так называемый дополняющий (или увеличивающий, или ненасыщенный) путь (см.рис.46, на котором

показан дополняющий путь в сети из вершины  $s$  в вершину  $t$ ; синие ребра отвечают первому типу ребра, при котором  $f(e_i) < c(e_i)$ , а красные — второму типу ребра, при котором оно направлено навстречу пути и при этом  $f(e_j) > 0$ ). Эти свойства означают, что существует положительное число  $\varepsilon$ , которое, во-первых, не превосходит ни одного числа  $c(x_i, x_{i+1}) - f(x_i, x_{i+1})$ , необходимого для насыщения любого ребра первого типа, а во-вторых, не превышает ни одной величины потока  $f(x_{i+1}, x_i)$  через любое из ребер второго типа ( $\varepsilon = 2$  для увеличивающего пути на рис.46). Добавим эту величину  $\varepsilon$  к потоку  $f(x_i, x_{i+1})$  через каждое ребро первого типа и вычтем ее из потока  $f(x_{i+1}, x_i)$  через каждое ребро второго типа. В результате мы получим новый поток, величина которого превосходит величину исходного потока на значение  $\varepsilon > 0$ . Однако это невозможно — по предположению, величина исходного потока была максимальной. Следовательно, вершина  $t$  обязательно принадлежит множеству  $T$ , то есть это множество  $T$  не пусто.

Для завершения доказательства остается понять, что построенное разбиение множества вершин на два блока  $S$  и  $T$  является  $(S, T)$ -разрезом, пропускная способность которого совпадает с величиной максимального потока. Но это действительно так: по построению множества  $S$ , любое ребро, идущее из  $S$  в  $T$ , является насыщенным, а поток на любом ребре, идущем из  $T$  в  $S$ , равен нулю. Следовательно, поток через  $(S, T)$  в точности равен пропускной способности разреза  $(S, T)$ .  $\square$

**Замечание 9.9.** Доказанная теорема ничего не говорит о существовании максимального потока в сети.

**9.1.6.** Идеи, положенные в основу доказательства теоремы Форда-Фалкерсона, можно использовать для построения простейшего алгоритма нахождения максимального потока в сети [?, ?] — так называемого алгоритма Форда-Фалкерсона. Именно, положим на первом шаге алгоритма  $f(x, y) = 0$  для всех  $(x, y) \in E(D)$ . Рассмотрим далее произвольный простой путь из  $s$  в  $t$  и увеличим поток в сети на описанную в доказательстве теоремы величину  $\varepsilon$ . На следующем шаге найдем произвольный дополняющий путь из  $s$  в  $t$  в нашей сети и увеличим поток на величину  $\varepsilon$ , сосчитанную для данного пути. Будем продолжать процесс до тех пор, пока в сети не останется дополняющих путей. В случае, если этот процесс завершится, результирующий поток будет максимальным.

Основным недостатком этого алгоритма является тот факт, что время его работы существенно зависит от выбора дополняющего пути на каждом шаге алгоритма. При неудачном выборе этих путей данный алгоритм может вообще никогда не завершиться (смотри упражнение ??). Можно показать, однако, что в случае целочисленных или рациональных значений пропускных способностей  $c(x, y)$  мы всегда получим максимальный поток за конечное число шагов алгоритма (упражнение ??).

Конструктивным доказательством существования максимального потока в сети в случае вещественных значений пропускных способностей является модификация метода Форда-Фалкерсона, известная как алгоритм Эдмонса-Карпа. В этой модификации на каждом шаге с помощью алгоритма поиска в ширину находится *кратчайший* по количеству ребер дополняющий путь. Затем поток в сети, как и в основном алгоритме, увеличивается на величину  $\varepsilon$ . Можно доказать (см., например, [?]), что время выполнения данной модификации алгоритма составляет  $O(|V| \cdot |E|^2)$ .

## 10 Понятие паросочетания. Теорема Бержа. Независимые множества и покрытия графа

**10.1.** Понятие паросочетания является одним из наиболее важных понятий теории графов. Оно встречается в огромном количестве прикладных задач [?].

**10.1.1.** Начнем, как всегда, с определения данного понятия.

**Определение 10.1.** Паросочетанием  $M$  в произвольном графе  $G$  называется любой набор ребер, не имеющих общих концевых вершин.

**Замечание 10.2.** Из определения видно, что при изучении паросочетаний нас будут интересовать только лишь простые графы. Действительно, любая петля в мультиграфе соединяет вершину саму с собой, и поэтому по определению не может входить ни в какое из паросочетаний. Далее, если одно из ребер мультиграфа, соединяющего пару вершин графа, входит в паросочетание  $M$ , то остальные ребра, соединяющие ту же пару вершин, в паросочетание  $M$  по определению войти не могут. Поэтому и мультиребра в графе также рассматривать смысла не имеет.

**Пример 10.3.** Любое одиночное ребро  $e$  в (простом) графе  $G \neq \bar{K}_n$  является простейшим примером паросочетания.

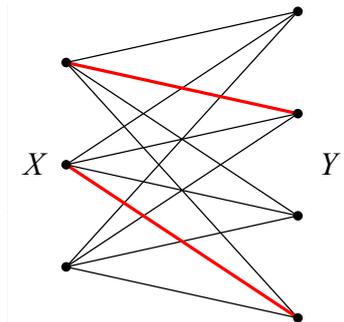


Рис. 47

**Пример 10.4.** На рис.47 показан чуть менее тривиальный пример паросочетания  $M$  в полном двудольном графе  $K_{3,4}$  (ребра, помеченные красным цветом на рисунке). Это паросочетание состоит из двух ребер и соединяет (или, как говорят, покрывает) четыре вершины этого графа.

**Определение 10.5.** Говорят, что вершина  $x \in V(G)$  покрыта паросочетанием  $M$ , если она является концом одного из ребер  $e$ , входящего в паросочетание  $M$ .

**10.1.2.** На практике нам, как правило, хочется покрыть паросочетанием как можно большее количество вершин в графе  $G$ . Например, мы можем захотеть для выполнения какого-то задания разбить всех студентов в группе на пары так, чтобы студенты внутри каждой пары имели опыт работы друг с другом. В этом примере все множество студентов можно рассматривать как множество  $V(G)$  вершин графа  $G$ . Ребро между двумя вершинами проводится в том случае, если соответствующие этим вершинам студенты имели до этого момента опыт совместной работы. Понятно, что если граф  $G \neq \bar{K}_n$ , то хотя бы одну такую пару студентов мы как-то сможем найти. Однако нам хотелось бы разбить на пары как можно большее количество студентов, в идеале — всех. На языке теории графов такое идеальное для нас разбиение носит название совершенного паросочетания.

**Определение 10.6.** Паросочетание  $M$  называется *совершенным*, если оно покрывает все вершины графа  $G$ .

В качестве примера рассмотрим граф  $G$ , показанный на рис.48,а. Красным цветом на этом рисунке помечены ребра, образующие паросочетание в представленном графе. Так как эти ребра покрывают все десять вершин графа  $G$ , то такое паросочетание является совершенным.

**10.1.3.** Далеко не все графы имеют совершенное паросочетание. Так, очевидно, что любое паросочетание  $M$  покрывает четное количество вершин в графе  $G$ . Поэтому любой граф, построенный на нечетном количестве вершин, совершенного паросочетания не имеет. Для графов, у которых совершенные паросочетания отсутствуют, полезно ввести понятие максимального паросочетания.

**Определение 10.7.** *Максимальным паросочетанием* (maximum matching) в графе  $G$  называется паросочетание  $M$ , размер которого (то есть количество входящих в него ребер) является наибольшим среди всех паросочетаний в графе  $G$ . Количество ребер  $|M|$  в таком паросочетании  $M$  обозначается обычно через  $\alpha'(G)$ .

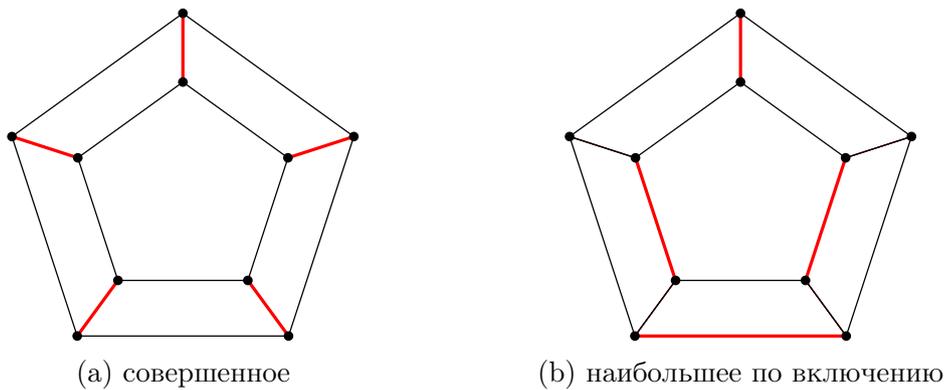


Рис. 48: Паросочетания

**10.1.4.** Казалось бы, для построения максимального паросочетания в графе можно использовать жадный алгоритм, добавляя случайным образом к  $M$  ребра графа до тех пор, пока это возможно. Полученное паросочетание, однако, максимальным может и не оказаться.

В качестве примера на рис.48,б показано паросочетание  $M$ , полученное в результате работы некоторого жадного алгоритма. Оно является *наибольшим по включению* (maximal matching) в том смысле, что добавление к нему любого другого ребра из множества  $E(G)$  уже невозможно. Однако количество ребер в  $M$  строго меньше  $\alpha'(G) = 5$ . Максимальное (и одновременно совершенное) паросочетание для такого графа показано на рис.48,а.

**10.2.** Итак, мы убедились на приведенном выше примере, что жадный алгоритм дает нам не максимальное, а наибольшее по включению паросочетание. Такое паросочетание иногда может оказаться максимальным, а иногда может таковым и не быть. В принципе, эти соображения могли бы нам позволить построить алгоритм поиска максимального паросочетания в графе, если бы в дополнении к жадному алгоритму у нас был бы некоторый критерий проверки того или иного графа на максимальность.

**10.2.1.** Действительно, если бы такой критерий существовал, то мы могли бы для произвольного графа  $G$  запускать жадный алгоритм, получать с его помощью наибольшее по включению

паросочетание, а затем с помощью этого критерия проверять полученное паросочетание на максимальность. В случае, если паросочетание оказывается максимальным, мы останавливаемся. В противном случае мы вновь запускаем жадный алгоритм.

**10.2.2.** Итак, для реализации описанного выше подхода нам необходим критерий максимальной паросочетания. Для того, чтобы этот критерий сформулировать, нам понадобятся следующие полезные понятия.

**Определение 10.8.** Пусть  $M$  есть некоторое паросочетание в графе  $G$ . Произвольный путь  $P$  в графе  $G$ , в котором чередуются ребра, входящие в  $M$ , и ребра, в  $M$  не входящие, называется  $M$ -чередующимся (рис.49,a).

**Определение 10.9.**  $M$ -чередующийся путь, обе концевые вершины которого не покрыты паросочетанием  $M$ , называется  $M$ -дополняющим путем (рис.49,b).

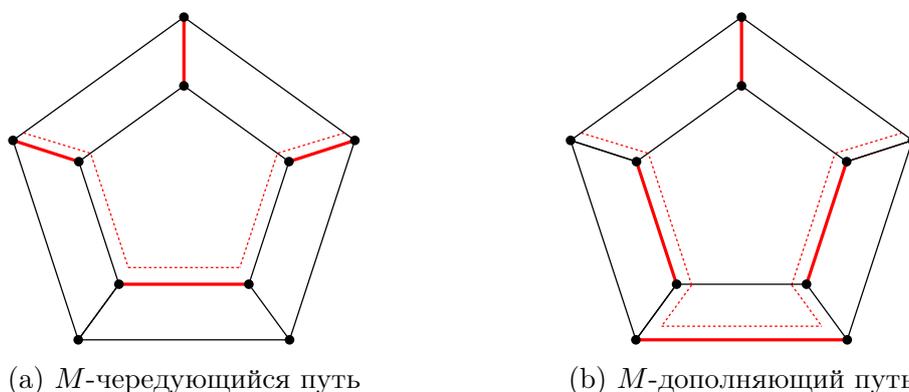


Рис. 49

Посмотрим теперь повнимательнее на рис.49,b. Заметим, что в  $M$ -дополняющем пути  $P$  (помеченном пунктирной ломаной на рис.49,b) количество ребер, покрытых паросочетанием  $M$ , на единицу меньше количества ребер в  $P$ , этим паросочетанием не покрытых. Исключим теперь из паросочетания  $M$  ребра, входящие в  $P$ , и добавим к  $M$  ребра этого пути, изначально паросочетанием не покрытые (процесс, известный в англоязычной литературе как *matching augmentation*). В результате мы получим некоторое новое паросочетание  $M'$ , содержащее на единицу большее количество ребер по сравнению с исходным паросочетанием  $M$ . Одновременно с этим у нас увеличится количество вершин, покрытых паросочетанием  $M'$ . Иными словами, мы показали, что наличие в графе  $G$  для заданного паросочетания  $M$ -дополняющего пути является признаком того, что паросочетание  $M$  максимальным не является.

**10.2.3.** В 1957 году французский математик Claude Berge доказал, что условие отсутствия для заданного паросочетания  $M$  в графе  $M$ -дополняющего пути является не только необходимым, но и достаточным условием максимальной паросочетания  $M$ . Именно, справедлива

**Теорема 10.10** (Berge, 1957). *Паросочетание  $M$  в графе  $G$  является максимальным тогда и только тогда, когда в таком графе  $M$ -дополняющие пути отсутствуют.*

**Доказательство.** Необходимость этого условия мы уже проверили — мы доказали, что если в графе существует  $M$ -дополняющий путь, то паросочетание  $M$  максимальным не является. Нам осталось доказать достаточность этого условия. Именно, предположим, что  $M$  не является максимальным паросочетанием в графе  $G$ . Покажем, что тогда в графе  $G$  обязательно найдется  $M$ -дополняющий путь.

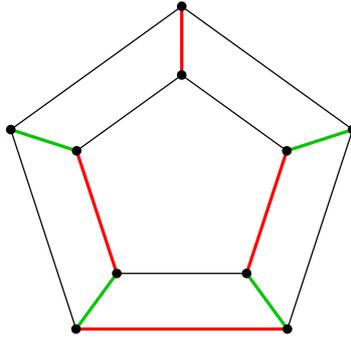


Рис. 50

Обозначим через  $M'$  максимальное паросочетание в  $G$  (зеленые ребра на рис.50). Так как паросочетание  $M$  максимальным не является, то  $|M'| > |M|$ . Рассмотрим симметрическую разность  $F := M \Delta M'$  этих двух паросочетаний. Так как любая вершина  $x \in V(G)$  может быть инцидентна максимум одному ребру из  $M$  и максимум одному ребру из  $M'$ , то степень любой такой вершины в подграфе  $H$ , индуцированном подмножеством ребер  $F$ , не превосходит двух. Следовательно, любая компонента связности подграфа  $H$  представляет собой путь или цикл, в котором чередуются ребра из  $M$  и из  $M'$ .

В случае цикла чередование ребер из  $M$  и  $M'$ , в частности, означает, что любой цикл в  $H$  имеет четную длину, а значит, количество ребер из  $M$  и  $M'$  в любом из циклов одинаково. Следовательно, условие  $|M'| > |M|$  означает, что в графе  $H$  обязан существовать путь, начальное и конечное ребра которого принадлежат  $M'$ . Начальная и конечная вершины такого пути покрыты  $M'$ , а значит, не покрыты  $M$ . Поэтому данный путь представляет собой  $M$ -дополняющий путь в  $G$ .  $\square$

**10.3.** Наряду с паросочетанием, в теории графов имеется еще целый ряд тесно связанных с ним понятий, к изучению которых мы и перейдем во второй части данного параграфа.

**10.3.1.** Начнем с определения *вершинного покрытия* графа.

**Определение 10.11.** Вершинным покрытием графа  $G$  называется набор вершин, покрывающих все ребра данного графа, то есть, более строго, подмножество  $K$  множества  $V(G)$  вершин графа, такое, что любое ребро  $e \in E(G)$  инцидентно по крайней мере одной вершине этого подмножества.

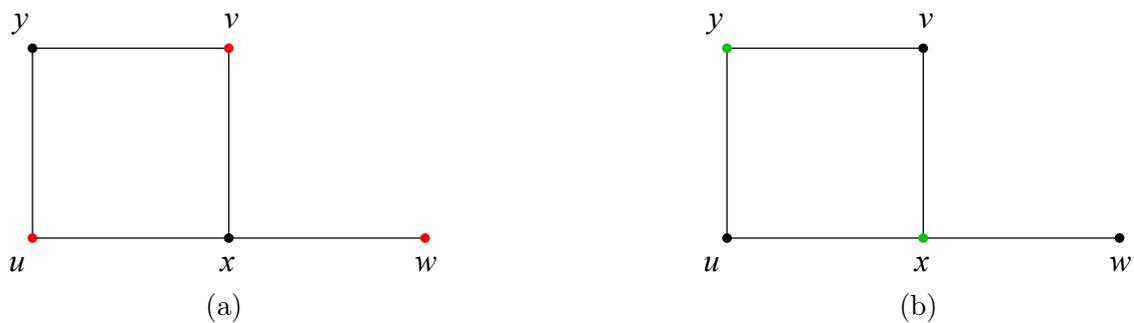


Рис. 51

Тривиальным примером вершинного покрытия является все множество  $V(G)$  вершин графа  $G$ . На рис.51,а приведен чуть менее тривиальный пример вершинного покрытия — вершины, поме-

ченные красным цветом на рисунке, покрывают все ребра нашего графа. Нас же, как правило, будут интересовать вершинные покрытия наименьшего размера — для графа  $G$ , показанного на рисунке, таковым является пара вершин, помеченных зеленым цветом на рис.51,b.

**Определение 10.12.** Покрытие  $K$  графа  $G$  называется *минимальным*, если любое другое покрытие  $K'$  имеет размер  $|K'|$ , больший или равный  $|K|$ . Количество вершин в минимальном вершинном покрытии обозначается через  $\beta(G)$ .

**Замечание 10.13.** Задача поиска минимального вершинного покрытия имеет довольно наглядную практическую интерпретацию. Предположим, что у нас имеется музей, упрощенный план которого описывается графом  $G$ , показанным на рис.51. При этом ребра графа  $G$  на этом плане описывают галереи музея, а вершины — проходы между галереями. Дирекция музея хочет так расставить смотрителей в музее, чтобы ими просматривались все галереи музея. Самое простое решение — поставить по смотрителю в каждом проходе. Однако оно, конечно же, оптимальным не является. Решив для этого графа задачу о поиске минимального вершинного покрытия, мы определим минимально необходимое количество  $\beta(G)$  смотрителей музея, а также места, в которых эти смотрители должны находиться.

**10.3.2.** Вернемся к задаче поиска максимального паросочетания в графе  $G$ . Оказывается, что с точки зрения теории экстремальных задач задача поиска минимального вершинного покрытия графа  $G$  оказывается двойственной к задаче поиска максимального паросочетания в  $G$ . Именно, имеет место

**Лемма 10.14** (Слабая двойственность). *В любом графе  $G$  размер  $|M|$  произвольного паросочетания в  $G$  не превосходит количества  $|K|$  вершин в произвольном вершинном покрытии графа  $G$ . В частности, для любого графа  $G$  справедливо неравенство*

$$\alpha'(G) \leq \beta(G). \quad (22)$$

**Доказательство.** Действительно, никакая вершина в графе  $G$  не может быть инцидентна двум или более ребрам одного и того же паросочетания  $M$ . Следовательно, даже для того, чтобы покрыть все ребра паросочетания  $M$  (не говоря уже о всех ребрах графа), нам понадобится по меньшей мере  $|M|$  вершин.  $\square$

**10.3.3.** Как обычно, слабая двойственность оказывается крайне полезной для доказательства оптимальности решений двойственных экстремальных задач — если мы в графе  $G$  нашли какое-то паросочетание  $M$ , размер  $|M|$  которого совпал с количеством  $|K|$  вершин в некотором вершинном покрытии графа, то отсюда и из леммы сразу следует, что  $M$  является максимальным паросочетанием в  $G$ , а  $K$  — минимальным вершинным покрытием  $G$ .

В качестве простейшего примера на рис.52,a показан цикл  $C_4$ , в котором имеется паросочетание  $M$  размером два (красные ребра), а также вершинное покрытие  $K$  размером два (зеленые вершины на рисунке). Следовательно, для такого графа соответствующее паросочетание  $M$  является максимальным, а вершинное покрытие  $K$  — минимальным, причем  $\beta(C_4) = |K| = 2 = |M| = \alpha'(C_4)$ .

В общем случае произвольного графа  $G$  равенство  $\beta(G) = \alpha'(G)$  выполняться, конечно же, не обязательно. В качестве характерного примера на рис.52 показан граф  $C_5$ , для которого  $\beta(C_5) = 3$ , а  $\alpha(C_5) = 2$ . В следующем параграфе мы покажем, что в частном случае двудольных графов равенство  $\beta(G) = \alpha'(G)$  выполнено всегда, то есть в этом случае имеет место так называемая сильная двойственность.



Рис. 52

**10.3.4.** Напомним, что под паросочетанием мы понимаем любой набор ребер в графе, не имеющих общих концевых вершин. Иногда паросочетание в графе еще называется *реберно независимым множеством*. Последнее название обычно используется как реберная аналогия еще одного важного понятия — *вершинно независимого множества*.

**Определение 10.15.** *Вершинно независимым* (или просто *независимым*) *множеством* в графе  $G$  называется любой набор  $S$  попарно несмежных между собой вершин.

Довольно очевидно, что, выбирая произвольную вершину  $x$  в нетривиальном графе  $G$ , мы получаем некоторое независимое множество  $S = \{x\}$ . Нам, однако, часто хочется понять, каков может быть максимальный размер независимого множества  $S$ .

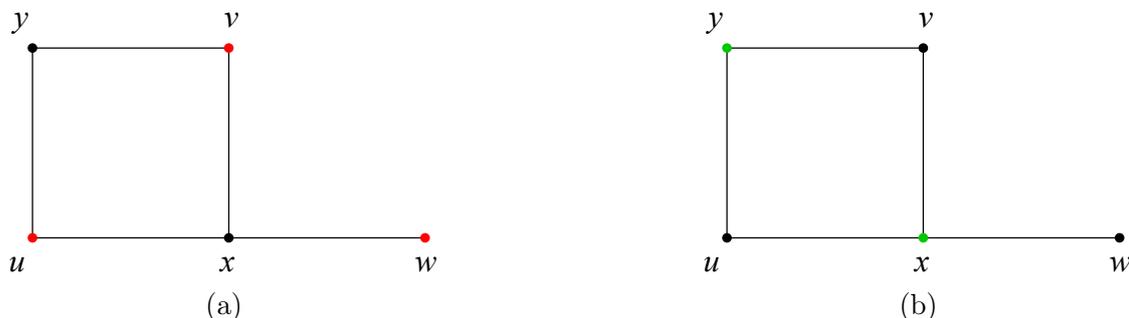


Рис. 53

Рассмотрим, к примеру, граф  $G$ , изображенный на рис.53. Любая вершина такого графа является независимым множеством в  $G$ . Независимое же множество  $S$  максимального размера состоит из попарно несмежных между собой вершин  $u$ ,  $v$  и  $w$  (вершины, помеченные красным цветом на рис.53,а).

**Определение 10.16.** Вершинно независимое множество  $S$  называется *максимальным*, если количество  $|S'|$  вершин в любом другом вершинно независимом множестве  $S'$  меньше или равно  $|S|$ . Количество вершин в максимальном вершинно независимом множестве графа  $G$  иногда называется *числом независимости* (independence number) и обозначается через  $\alpha(G)$ .

Таким образом, для графа  $G$ , показанного на рис.53,а, число независимости  $\alpha(G) = 3$ .

**10.3.5.** Для графа, показанного на рис.53, достаточно легко убедиться в том, что множество  $S = \{u, v, w\}$  действительно является максимальным вершинно независимым множеством. В

случае более сложно устроенных графов часто очень непросто понять, действительно ли то или иное подмножество вершин представляет собой вершинно независимое множество максимального размера. Данную ситуацию, однако, часто спасает тот факт, что, как и в случае максимального паросочетания в графе  $G$ , для рассматриваемой задачи имеется двойственная к ней экстремальная задача — задача о поиске так называемого минимального реберного покрытия графа.

**Определение 10.17.** *Реберным покрытием* графа  $G$  называется набор  $L$  ребер, покрывающий все вершины этого графа. Иными словами, любая вершина графа инцидентна одному из ребер, входящих в подмножество  $L \subseteq E(G)$ .

Как видно из определения, реберное покрытие в графе существует лишь тогда, когда в  $G$  отсутствуют изолированные вершины. Другими словами, реберное покрытие существует в случае, когда минимальная степень  $\delta(G)$  вершин в графе  $G$  строго больше нуля.

Понятно, что все множество  $E(G)$  ребер в графе  $G$  с  $\delta(G) > 0$  является реберным покрытием графа  $G$ . Нас, как обычно, будет интересовать минимальный набор ребер, покрывающий все вершины графа.

**Определение 10.18.** Реберное покрытие  $L$  графа  $G$  называется *минимальным*, если размер любого другого реберного покрытия  $L'$  графа  $G$  больше или равен  $|L|$ . Размер минимального реберного покрытия графа  $G$  обозначается обычно через  $\beta'(G)$ .

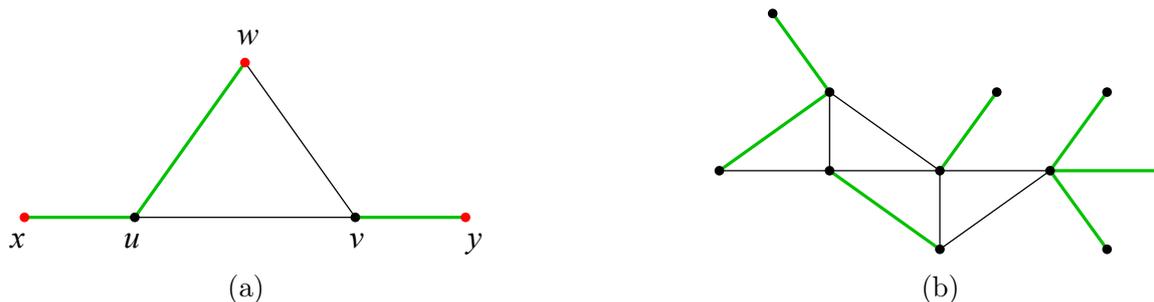


Рис. 54

Рассмотрим в качестве примера граф, показанный на рис.54,а. Минимальное реберное покрытие такого графа состоит из трех ребер, помеченных зеленым цветом на рисунке. Действительно, ребра  $\{x, u\}$  и  $\{v, y\}$  нам необходимы, чтобы покрыть два листа нашего графа — вершины  $x$  и  $y$ . При этом остается непокрытой вершина  $w$ , которую можно покрыть, к примеру, ребром  $\{u, w\}$ . Таким образом, для этого графа  $\beta'(G) = 3$ .

На рис.54,б показан чуть более сложный граф  $G$ . Утверждается, что размер  $\beta'(G)$  минимального реберного покрытия такого графа равен семи. Действительно, пять ребер нужны нам для того, чтобы покрыть пять листьев графа  $G$ . Минимальное количество ребер, покрывающих оставшиеся три вершины, равно двум.

**10.3.6.** Вернемся к вершинно независимым множествам и их связи с реберными покрытиями графа.

**Лемма 10.19** (Слабая двойственность). *В любом графе  $G$  с  $\delta(G) > 0$  размер  $|S|$  произвольного вершинно независимого множества  $S$  не превосходит величины  $|L|$  произвольного реберного покрытия  $L$  графа  $G$ . В частности,*

$$\alpha(G) \leq \beta'(G). \tag{23}$$

**Доказательство.** Действительно, никакое ребро не может покрывать две вершины, принадлежащие вершинно независимому множеству. Как следствие, любое ребро из  $L$  покрывает либо одну, либо ноль вершин из  $S$ , так что  $|L| \geq |S|$ .  $\square$

Используя свойство слабой двойственности, достаточно просто убедиться в том, что найденные в разобранных выше примерах подмножества действительно оптимальны. Так, для графа  $G$ , показанного на рис.54,а, мы предъявили вершинно независимое множество  $S = \{x, y, w\}$  (красные вершины на рисунке), а также реберное покрытие  $L = \{\{x, u\}, \{u, w\}, \{v, y\}\}$  (зеленые ребра на рисунке). Так как их размеры совпадают, то первое действительно является максимальным вершинно независимым множеством, а второе — минимальным реберным покрытием в  $G$ .



Рис. 55

**10.3.7.** Заметим, что любому вершинно независимому множеству в графе  $G$  отвечает некоторая клика в дополнении  $\bar{G}$  к графу  $G$  (см.рис.55). Как следствие, задача поиска максимального независимого множества эквивалентна так называемой задаче о клике — задаче нахождения в заданном графе клики наибольшего размера. Количество вершин в клике максимального размера обозначается обычно через  $\omega(G)$ . Мы показали, таким образом, что

$$\omega(G) = \alpha(\bar{G}).$$

Задача о клике довольно встречается на практике — например, она возникает в социологии при изучении в некотором сообществе подгруппы людей, каждый человек в которой знает любого другого члена этой подгруппы. Не менее часто встречается на практике и исходная задача — задача о поиске максимального вершинно независимого множества. Все это делает крайне актуальным поиск эффективного алгоритма, позволяющего подобного рода задачи решать. К сожалению, ситуация с эффективными алгоритмами для этих задач складывается даже хуже, чем для задач поиска максимальных паросочетаний в графах.

Заметим, прежде всего, что как и в случае максимального паросочетания, жадный алгоритм в данных задачах также не применим — несложно убедиться, что вместо максимального такой алгоритм дает нам так называемое наибольшее по включению независимое множество.

**Определение 10.20.** Вершинно независимое множество  $S$  называется *наибольшим по включению*, если при добавлении к нему любой другой вершины  $x$  графа  $G$  множество  $S \cup \{x\}$  перестает быть независимым.

В качестве примера выберем для показанного на рис.53 графа  $G$  в качестве начальной вершины жадного алгоритма вершину  $x$  (рис.53,б). Удаляя смежные с ней вершины  $u, v$  и  $w$ , мы в результате работы алгоритма получаем независимое наибольшее по включению множество  $K = \{x, y\}$  вершин, не являющееся максимальным. Несложная оптимизация этого алгоритма,

закрывающаяся в выборе на каждом шаге вершины с минимально возможной степенью, также не гарантирует получения максимального независимого множества.

В задаче поиска максимального паросочетания ситуацию спасает критерий Берга существования в графе максимального паросочетания — мы далее покажем, как с его помощью построить довольно эффективные алгоритмы ее решения. Проблема с вершинно независимыми множествами состоит в том, что для них подобного рода простые критерии оптимальности отсутствуют. Следствием этого является тот факт, что с алгоритмической точки зрения задача поиска максимального вершинно независимого множества простых решений не имеет — в семидесятые годы прошлого века было показано, что задача поиска максимального независимого множества (independent set problem)  $NP$ -трудна.

**10.4.** Мы поняли, как связаны между собой паросочетания (то есть реберно независимые множества) и вершинные покрытия, а также вершинно независимые множества и реберные покрытия. Разберемся теперь с тем, как связаны между собой вершинное покрытие и вершинно независимое множество, а также паросочетание и реберное покрытие.

**10.4.1.** Начнем с вершинно независимого множества и вершинного покрытия. В качестве примера рассмотрим граф  $G$ , показанный на рис.53. Его максимальное вершинно независимое множество состоит из подмножества вершин  $S = \{u, v, w\}$  (рис.53,a), а минимальное вершинное покрытие — из подмножества  $K = \{x, y\}$  (рис.53,b), являющегося дополнением к  $S$  в  $V(G)$ . Оказывается, что этот факт имеет место и в общем случае, причем для любых, а не только оптимальных вершинно независимых множеств и вершинных покрытий. Именно, справедлива следующая

**Теорема 10.21.** *Подмножество  $S$  множества  $V(G)$  вершин графа  $G$  является независимым тогда и только тогда, когда подмножество  $K = V(G) \setminus S$  образует вершинное покрытие графа  $G$ .*

**Доказательство.** По определению,  $S$  является независимым в случае, когда никакие две вершины из  $S$  не соединены ребром. Иными словами, если один из двух концов некоторого ребра  $e \in E(G)$  входит в вершину подмножества  $S$ , то второй конец этого ребра обязан входить в вершину, принадлежащую  $K = V(G) \setminus S$ . Если же ребро  $e$  не является инцидентным ни одной вершине подмножества  $S$ , то оно тем более обязано быть инцидентным какой-то вершине множества  $K$ . Иными словами, любое ребро графа  $G$  обязано быть инцидентным хотя бы одной вершине множества  $K$ . Но это и означает, что  $K$  образует вершинное покрытие графа  $G$ .

Обратно, предположим, что у нас имеется какое-то вершинное покрытие  $K$ . Это означает, в частности, что в графе не существует ребра, оба конца которых не покрыты вершинами из  $K$ . Следовательно, вершины из  $V(G) \setminus K$  покрывают не более одной вершины каждого ребра, то есть образуют вершинно независимое множество.  $\square$

**Следствие 10.22.** *Для любого графа  $G$  справедливо равенство*

$$\alpha(G) + \beta(G) = n = |V(G)|. \quad (24)$$

**Доказательство.** Пусть  $S$  есть максимальное независимое множество графа  $G$ ,  $|S| = \alpha(G)$ . По теореме (10.21),  $V(G) \setminus S$  образует какое-то (может, и не минимальное) вершинное покрытие  $K$  графа  $G$ . Как следствие,

$$n = \alpha(G) + |K| \geq \alpha(G) + \beta(G).$$

Аналогично, пусть  $K$  есть минимальное вершинное покрытие графа  $G$ ,  $|K| = \beta(G)$ . По теореме (10.21),  $V(G) \setminus K$  представляет собой какое-то (может, и не максимальное) независимое

множество  $S$  графа  $G$ . Поэтому

$$n = \beta(G) + |S| \leq \beta(G) + \alpha(G).$$

Из полученных неравенств следует, что  $\alpha(G) + \beta(G) = n$ . □

**10.4.2.** Давайте теперь попытаемся разобраться с реберными покрытиями и паросочетаниями. В случае вершинного покрытия и вершинно независимого множества мы доказали, что дополнение к любому вершинному покрытию обязано являться вершинно независимым множеством и наоборот. Несложно убедиться, что в случае ребер аналогичный факт места не имеет.

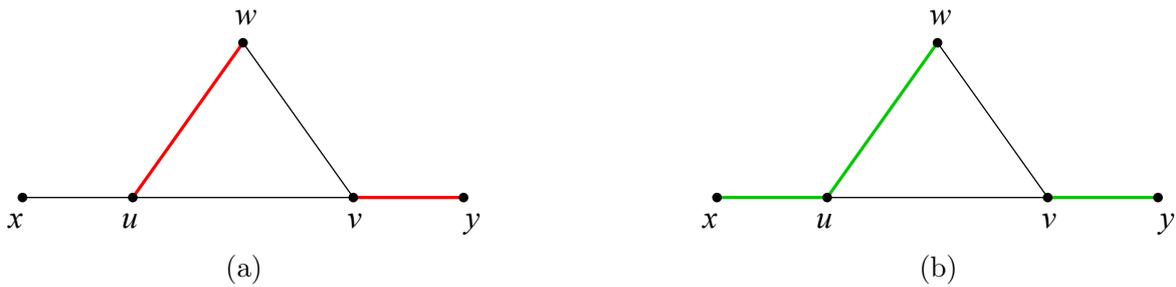


Рис. 56

В качестве примера рассмотрим граф  $G$ , показанный на рис.56. Набор ребер  $M = \{\{u, w\}, \{v, u\}\}$  образует паросочетание, то есть представляет собой реберно независимое множество (красные ребра на рис.56,а), однако его дополнение — набор ребер  $E(G) \setminus M = \{\{x, u\}, \{u, v\}, \{v, w\}\}$  — реберным покрытием  $G$  не является (вершина  $u$  остается непокрытой этим набором). Обратное, набор ребер  $L = \{\{x, u\}, \{u, w\}, \{v, u\}\}$  образует реберное покрытие графа  $G$  (зеленые ребра на рис.56,б), однако дополнение к нему — набор ребер  $E(G) \setminus L = \{\{u, v\}, \{v, w\}\}$  — паросочетания в графе  $G$  не образует.

Несмотря на это, числа  $\alpha'(G)$  и  $\beta'(G)$  связаны между собой — оказывается, сумма этих чисел равна количеству  $|V(G)|$  вершин графа  $G$ .

**Теорема 10.23** (Gallai, 1959). *Для любого графа  $G$  с  $\delta(G) > 0$  справедливо равенство*

$$\alpha'(G) + \beta'(G) = n, \tag{25}$$

где  $n = |V(G)|$  — количество вершин в графе  $G$ .

**10.4.3.** Прежде чем доказывать теорему Галлаи, исследуем структуру остовного подграфа  $H = (V(G), L)$ , индуцированного ребрами минимального реберного покрытия  $L$  (рис.54).

Как видно из рис.54,б, подграф  $H$  состоит из нескольких связных компонент, каждая из которых представляет собой некоторое дерево. Оказывается, что это дерево имеет специальный вид, а именно, представляет собой *звезду* — дерево, в котором лишь одна вершина может иметь степень, большую единицы (рис.57,а). Докажем все эти утверждения строго.

**Лемма 10.24.** *Остовный подграф  $H$ , порожденный набором ребер, входящих в минимальное реберное покрытие  $L$  графа  $G$ , представляет собой объединение связных компонент, каждая из которых представляет собой звезду.*



Рис. 57

**Доказательство.** Прежде всего, заметим, что в  $H$  циклов быть не должно — в противном случае мы бы могли всегда разорвать цикл, убрав одно из ребер  $e \in C$ , не нарушив при этом покрытие вершин  $V(C)$  оставшимися ребрами. Следовательно,  $H$  представляет собой остовный лес графа  $G$ .

Теперь предположим, что в остовном подграфе  $H$  у нас нашлось ребро  $e$ , обе инцидентные вершины которого имеют степени, большие единицы (см.рис.57,b). В этом случае мы всегда такое ребро можем удалить, не нарушив покрытия ребрами остовного подграфа  $H - e$  всех вершин графа  $G$ . Продолжая описанный процесс до тех пор, пока у нас не останется подобных ребер, мы получим лес, каждая связная компонента которого представляет собой звезду.  $\square$

**10.4.4.** Перейдем к доказательству теоремы Галлаи. Идея этого доказательства состоит в следующем. Мы вначале возьмем максимальное паросочетание  $M$  размера  $\alpha'(G)$  и построим по нему некоторое реберное покрытие  $L$ , количество ребер в котором окажется равным  $n - \alpha'(G)$ . Так как  $L$  — какое-то, не обязательно минимальное реберное покрытие, то

$$n - \alpha'(G) \geq \beta'(G) \quad \implies \quad n \geq \alpha'(G) + \beta'(G).$$

Затем мы возьмем минимальное реберное покрытие  $L$ ,  $|L| = \beta'(G)$ , и построим по нему паросочетание  $M$  размера  $|M| = n - \beta'(G)$ . Так как  $M$  — произвольное паросочетание, то

$$n - \beta'(G) \leq \alpha'(G) \quad \implies \quad n \leq \alpha'(G) + \beta'(G).$$

Как следствие,  $n$  окажется равным  $\alpha'(G) + \beta'(G)$ .

Приступим теперь к реализации этого плана. Пусть  $M$  — какое-то максимальное паросочетание в графе  $G$ ,  $|M| = \alpha'(G)$  (красные ребра на рис.56,a). Так как каждое ребро паросочетания покрывает две различные вершины графа  $G$ , то общее количество вершин, покрытых паросочетанием  $M$ , равно  $2|M| = 2\alpha'(G)$ . Обозначим через  $U$  подмножество множества  $V(G)$  вершин графа  $G$ , не покрытых этим паросочетанием (вершина  $x$  на рис.56,a). Размер этого подмножества равен, очевидно,  $n - 2\alpha'(G)$ , где  $n = |V(G)|$ . Кроме того, любые две вершины  $x, y$  подмножества  $U$  несмежны между собой — в противном случае мы бы могли добавить к  $M$  ребро  $\{x, y\}$  и получить паросочетание  $M' = M \cup \{x, y\}$  большего размера, что невозможно.

Так как  $\delta(G) > 0$ , то из каждой вершины  $x$  подмножества  $U$  исходит хотя бы одно ребро в одну из вершин  $u$  подмножества  $V(G) \setminus U$  (ребро  $\{x, u\}$  на рис.56,a). Выберем тогда по одному ребру, исходящему из каждой вершины подмножества  $U$ , и сформируем из них подмножество  $F$  множества  $E(G)$  ребер графа  $G$ . Размер подмножества  $F$  совпадает с размером подмножества  $U$  и равен  $n - 2\alpha'(G)$ . По построению,  $M \cap F = \emptyset$ .

Заметим теперь, что подмножество  $M \cup F$  множества  $E(G)$  ребер графа  $G$  покрывает все вершины нашего графа. Подсчитаем количество ребер, входящих в подмножество  $M \cup F$ :

$$|M \cup F| = |M| + |F| = \alpha'(G) + n - 2\alpha'(G) = n - \alpha'(G).$$

Размер подмножества  $M \cup F$ , как и размер любого реберного покрытия, больше или равен размеру  $\beta'(G)$  *минимального* реберного покрытия  $L$  графа  $G$ , поэтому

$$n - \alpha'(G) \geq \beta'(G) \quad \implies \quad n \geq \alpha'(G) + \beta'(G).$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно доказать обратное неравенство.

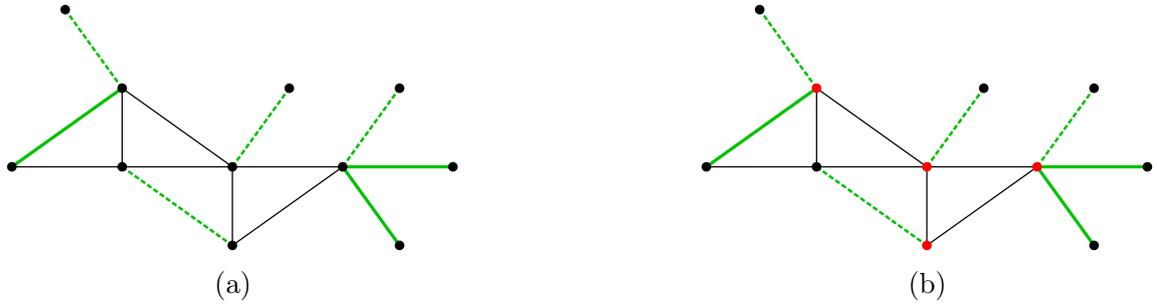


Рис. 58

Для этого рассмотрим некоторое минимальное реберное покрытие  $L$  графа  $G$ ,  $|L| = \beta'(G)$  (зеленые ребра на рис.58,а). Мы знаем, что любая компонента связности остовного подграфа  $H$ , построенного на ребрах подмножества  $L$ , представляет собой звезду. Давайте теперь выберем в каждой из этих звезд по одному ребру (зеленые пунктирные ребра на рис.58,а). Эти ребра образуют какое-то паросочетание  $M$  в исходном графе  $G$ , причем размер  $|M|$  этого паросочетания совпадает с количеством центров звезд (красные вершины на рис.58,б).

Теперь заметим, что количество концевых вершин каждой звезды в точности совпадает с общим количеством ребер в звезде. Следовательно, количество вершин, не являющихся центрами звезд (черные вершины на рис.58,б), равно общему количеству  $|L| = \beta'(G)$  ребер в минимальном реберном покрытии графа  $G$  (зеленые ребра на рис.58,б). Общее же количество  $n = |V(G)|$  вершин в графе  $G$ , таким образом, равно

$$n = |M| + |L| = |M| + \beta'(G).$$

Но  $M$  — это какое-то паросочетание в графе  $G$ , поэтому его размер меньше или равен размеру  $\alpha'(G)$  максимального паросочетания в этом графе. Следовательно,

$$n = |M| + \beta'(G) \leq \alpha'(G) + \beta'(G).$$

Сравнивая это неравенство с доказанным выше неравенством  $n \geq \alpha'(G) + \beta'(G)$ , мы и получаем требуемый результат. □

## 11 Паросочетания в двудольных графах. Алгоритм Куна поиска максимального паросочетания в двудольном графе

**11.1.** Как правило, бóльшая часть задач, встречающихся на практике и сводящихся к поиску паросочетания в графе, связана с поиском максимального паросочетания в двудольном графе. Приведем характерный пример такого рода задач.

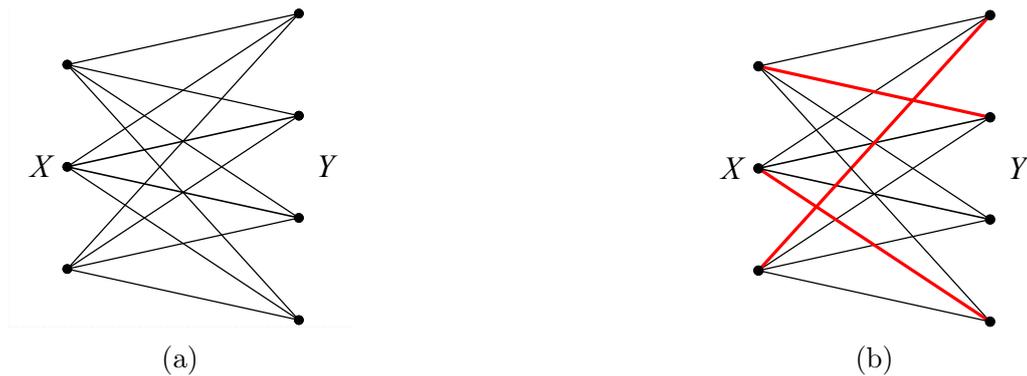


Рис. 59

Пусть в группе имеется  $m$  студентов, которых необходимо распределить по  $n$  компаниям на летнюю практику. Для моделирования этой задачи распределения мы можем ввести двудольный граф  $G$ , блоки  $X$  и  $Y$  которого содержат  $m$  и  $n$  вершин соответственно. Любые две вершины  $x \in X$  и  $y \in Y$  этого графа соединяются ребром в случае, если квалификация студента удовлетворяет данную компанию, а сама компания, в свою очередь, устраивает данного студента. На рис.59,а в качестве примера изображен полный двудольный граф  $K_{3,4}$ , моделирующий некоторую идеальную ситуацию, при которой у нас любой студент готов пройти практику в любой компании, а любая компания, в свою очередь, готова принять на практику любого студента. Если же у нас какой-то студент не готов пойти в ту или иную компанию, или в случае, когда компания не готова того или иного студента на практику пригласить, мы получим некоторый подграф данного полного двудольного графа.

Предположим теперь, что в каждую компанию мы можем устроить только лишь одного студента. Последнее условие означает, что задача распределения студентов по летним практикам сводится к задаче поиска максимального паросочетания в построенном двудольном графе (см.рис.59,б, на котором красными ребрами помечено некоторое решение данной задачи).

**11.2.** Доказанная в первом параграфе теорема Бержа позволяет строить достаточно эффективные алгоритмы нахождения максимального паросочетания в двудольных графах. Мы опишем простейший из них — так называемый алгоритм Куна.

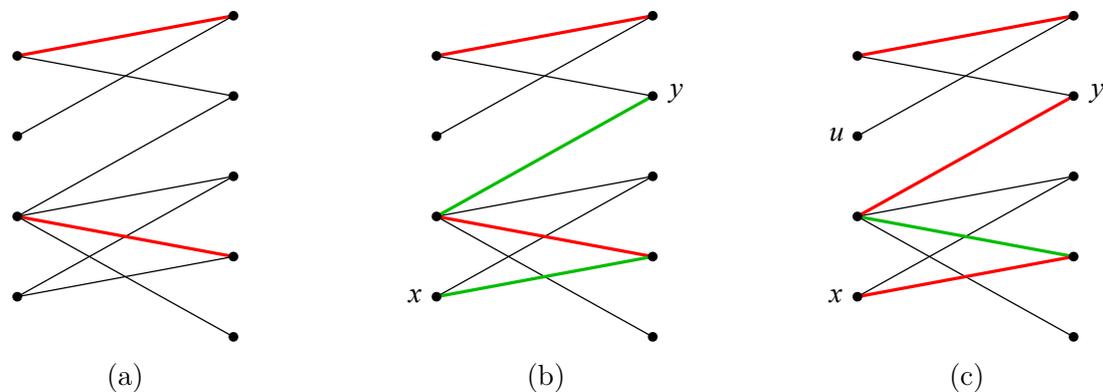


Рис. 60

**11.2.1.** В качестве первого шага описываемого алгоритма построим в графе  $G[X, Y]$ ,  $|X| \leq |Y|$ , произвольное паросочетание  $M$  (см.рис.60,а). Для этого мы можем, например, перебрать все

вершины  $x_i \in X$  и добавить к  $M$  ребро  $\{x_i, y_j\}$  в случае, если вершина  $y_j$  еще не покрыта паросочетанием  $M$  (смотри ребра, помеченные красным цветом на рис.60,а). Если при этом все вершины  $x_i$  оказались покрытыми паросочетанием  $M$ , то мы на этом работу алгоритма прекращаем.

В противном случае мы выбираем произвольную вершину  $x \in X$ , еще не покрытую паросочетанием  $M$ , и запускаем из  $x$  поиск в глубину, строя из этой вершины  $M$ -чередующиеся пути (см.рис.60,б). В случае, если хотя бы один из строящихся путей  $P$  в какой-то момент окажется  $M$ -дополняющим (путь  $P = (x, y)$  на рис.60,б), мы останавливаем поиск в глубину, меняем ребра этого пути, покрытые  $M$ , на непокрытые  $M$  (то есть вместо  $M$  рассматриваем паросочетание  $M' = M \Delta E(P)$ ), и добавляем их в строящееся паросочетание (рис.60,с). В противном случае переходим к следующей еще не покрытой паросочетанием  $M$  вершине  $x' \in X$ .

**11.2.2.** Наша следующая задача — убедиться в корректности описанного выше алгоритма, а именно, доказать, что по окончании его работы мы действительно получим максимальное паросочетание  $M$  в двудольном графе  $G[X, Y]$ . На основании леммы 10.14, нам достаточно предъявить для этого некоторое вершинное покрытие  $K$ , размер которого совпадает с количеством ребер в  $M$ . Как мы уже отмечали в первом параграфе, в общем случае это удастся сделать не всегда. Оказывается, однако, что в двудольном графе такое вершинное покрытие обязательно найдется. Гарантирует этот факт нам следующая

**Теорема 11.1** (Сильная двойственность; Кёниг, 1931; Эгервари, 1931). *В любом двудольном графе  $G$  количество  $\alpha'(G)$  ребер в максимальном паросочетании равно количеству  $\beta(G)$  вершин в минимальном вершинном покрытии  $G$ .*

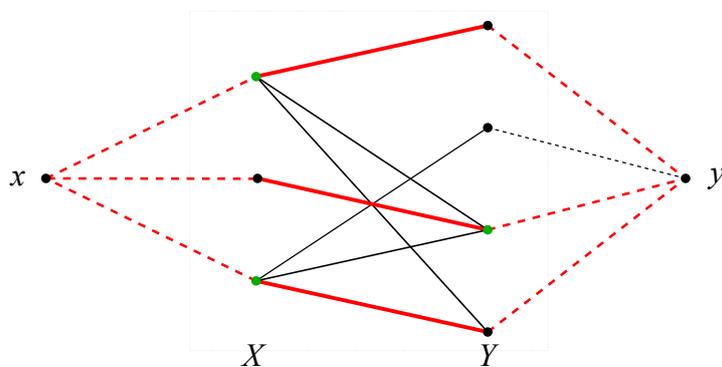


Рис. 61

**Доказательство** легче всего провести, используя вершинную теорему Менгера. Именно, добавим к вершинам графа  $G[X, Y]$  две дополнительные вершины  $x$  и  $y$ , и соединим с  $x$  все вершины блока  $X$ , а с  $y$  — все вершины блока  $Y$  (рис.61). Заметим, что в полученном графе  $G'$  любое подмножество  $S$  множества  $V(G')$  вершин разделяет вершины  $x$  и  $y$  тогда и только тогда, когда это же подмножество покрывает все ребра исходного графа  $G[X, Y]$  (зеленые вершины на рисунке). Кроме того, любое множество путей в графе  $G'$ , соединяющих вершины  $x$  и  $y$  и не имеющих общих внутренних вершин, образует некоторое паросочетание в графе  $G[X, Y]$  (красные ребра на рисунке). Верно и обратное: любое паросочетание  $M$  в  $G$  может быть продолжено до путей, соединяющих в графе  $G'$  вершины  $x$  и  $y$ , и не имеющих общих внутренних вершин. Теперь для доказательства равенства  $\alpha'(G) = \beta(G)$  достаточно сослаться на вершинную теорему Менгера.  $\square$

**11.2.3.** Вернемся к алгоритму Куна поиска максимального паросочетания  $M$  в двудольном

графе  $G[X, Y]$ . Покажем, что в  $G[X, Y]$  найдется вершинное покрытие  $K$ , величина которого равна  $|M|$ , где  $M$  — полученное в результате работы алгоритма Куна паросочетание.

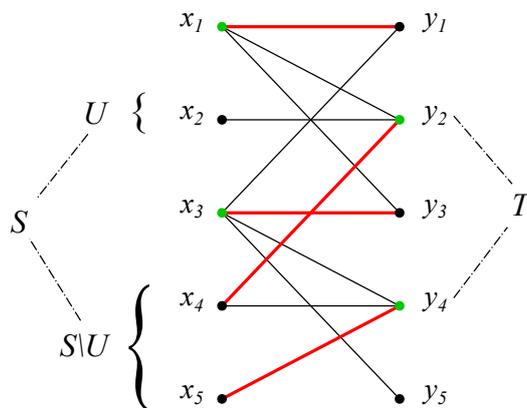


Рис. 62

Обозначим через  $U$  подмножество вершин из  $X$ , не покрытых паросочетанием  $M$  (вершина  $x_2$  на рис.62), а через  $Z$  — подмножество всех вершин графа  $G$ , связанных  $M$ -чередующимися путями с вершинами из  $U$  (вершины  $x_2, y_2, x_4, y_4, x_5$  на рис.62). Пусть  $S = Z \cap X$ ,  $T = Z \cap Y$ , а  $K = (X \setminus S) \cup T$  (вершины подмножества  $K$  помечены зеленым цветом на рис.62). Покажем, что  $K$  представляет собой вершинное покрытие графа  $G$ .

Действительно, все ребра, исходящие из  $X \setminus S$ , покрыты вершинами из  $K$ . Нам остается убедиться, что все ребра, исходящие из  $S$ , также покрыты вершинами из  $K$ . Понятно, что все ребра, исходящие из  $S$  в  $T$ , вершинами из  $K$  покрыты. Мы докажем требуемое, если поймем, что ребра из  $S$  в  $Y \setminus T$  отсутствуют. Предположим противное, а именно, предположим, что у нас имеется какое-то ребро из вершины  $x \in S$  в вершину  $y \in Y \setminus T$ . Заметим, прежде всего, что такое ребро не может принадлежать  $M$ . Действительно, вершины подмножества  $U$  ребрами из  $M$  не могут быть покрыты по определению  $U$ , а вершины из  $S \setminus U$  покрыты ребрами из  $M$ , которые соединяют их с вершинами из  $T$ , а значит, другие ребра, принадлежащие  $M$ , из этих вершин выходить не могут. Следовательно, из  $x$  выходит ребро  $e \notin M$ . Но тогда, дойдя до вершины  $x$ , алгоритм поиска в глубину прошел бы по  $e$  и занес бы вершину  $y$  в подмножество  $T$ , а это противоречит тому, что  $y \in Y \setminus T$ .

Теперь сосчитаем количество вершин в  $K$ . Заметим для этого, что и вершины из  $X \setminus S$ , и вершины из  $T$  покрыты ребрами паросочетания  $M$ . Так как любая вершина из  $T$  соединена с какой-то вершиной из  $S$  ребром, принадлежащим  $M$ , то никакое ребро из  $M$  не может соединять вершину из  $T$  с вершиной из  $X \setminus S$ . Как следствие, количество ребер в  $M$  больше или равно  $|K|$ . С учетом леммы (10.14) мы и получаем, что  $|K| = |M|$ .  $\square$

**Замечание 11.2.** Доказательство корректности алгоритма Куна является, по сути, еще одним, независимым доказательством теоремы Кёнига-Эгервари.

**11.2.4.** Итак, в результате работы алгоритма Куна мы получаем максимальное паросочетание  $M$  в двудольном графе  $G[X, Y]$ , которое покрывает нам  $|M|$  вершин как в  $X$ , так и в  $Y$ .

**Определение 11.3.** Паросочетание  $M$  в двудольном графе  $G[X, Y]$  называется  $X$ -насыщенным, если любая вершина из блока  $X$  покрыта этим паросочетанием.

Предположим, что построенное нами паросочетание  $X$ -насыщенным не является. Это означает, что в  $X$  существует некоторое подмножество  $U \subset X$  вершин, не покрытых  $M$ . Рассмотрим про-



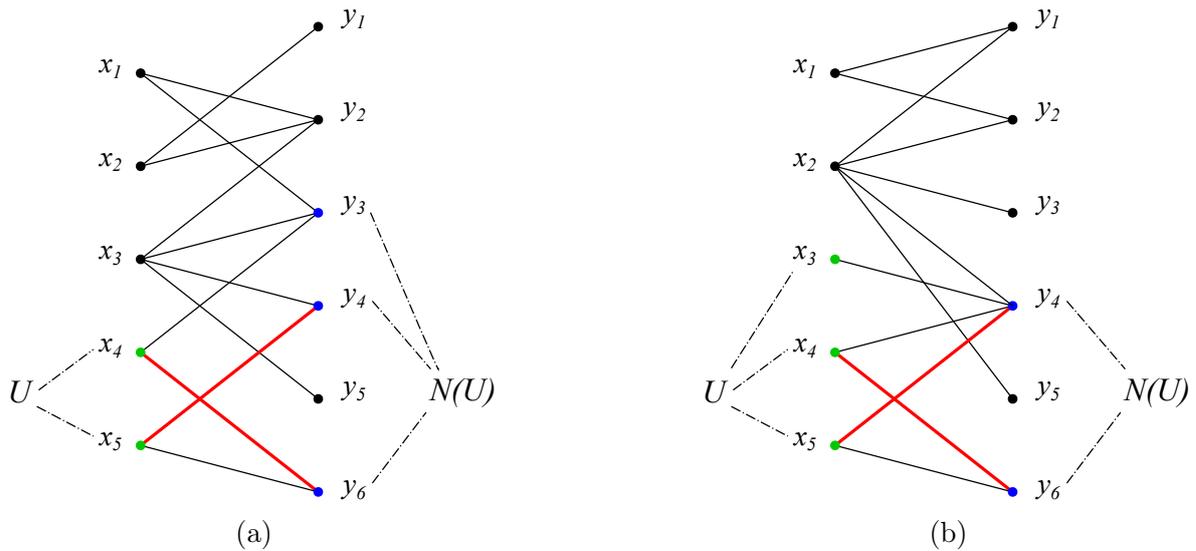


Рис. 64

**Теорема 11.4** (Ph.Hall, 1935). Для того, чтобы в двудольном графе  $G[X, Y]$  существовало  $X$ -насыщенное паросочетание, необходимо и достаточно, чтобы для любого подмножества  $U$  множества  $X$  мощность соответствующего ему подмножества  $N(U) \subset Y$  смежных с  $U$  вершин была бы больше или равна мощности  $|U|$  подмножества  $U$ :

$$|U| \leq |N(U)| \quad \forall U \subseteq X. \quad (26)$$

**Замечание 11.5.** Неформально говоря, теорема Холла утверждает, что каждое подмножество  $U \subseteq X$  должно иметь в  $Y$  достаточное количество смежных вершин. В частности, совершенно очевидно, что для существования  $X$ -насыщенного паросочетания необходимо выполнение условия  $|X| \leq |Y|$ . Теорема 11.4, по сути, обобщает это несложное наблюдение на произвольное подмножество  $U$  множества  $X$ .

**Замечание 11.6.** Теорему Холла часто называют также теоремой о деревенских свадьбах. Это название связано со следующей формулировкой этой задачи, восходящей к известному немецкому математику первой половины двадцатого века Герману Вейлю. В деревне относительно каждой пары юноша-девушка известно, дружат они или нет. Тогда, если для любых  $k$  юношей объединение подмножеств их подруг содержит по крайней мере  $k$  девушек, то каждый юноша сможет выбрать себе будущую жену из числа своих же подруг.

**11.2.6.** Теорема Холла легко доказывается с использованием уже известных нам минимаксных теорем, таких, как теорема Менгера или теорема Кёнига-Эгервари. Мы же для полноты изложения приведем здесь прямое доказательство теоремы Холла.

Сразу заметим, что необходимость условия (26) совершенно очевидна. Действительно, пусть существует хотя бы одно подмножество  $U$ , для которого это условие не выполняется. На рис.64,b изображена подобная ситуация — в этом примере смежное с подмножеством  $U$  первых трех вершин подмножество  $N(U) \subset Y$  содержит всего две вершины. Рассмотрим тогда двудольный подграф  $G'[U, N(U)]$ . В таком графе  $U$ -насыщенного паросочетания, очевидно, не существует. Но это автоматически означает, что не существует  $X$ -насыщенного паросочетания и в исходном графе  $G$ . Действительно, все ребра, исходящие из  $U$ , приходят только в  $N(U)$ . Поэтому правильно выбрать ребра, выходящие из подмножества  $U$ , нам уже не удастся вне зависимости

от того, насколько успешно мы справились с решением этой задачи для ребер, исходящих из подмножества  $X \setminus U$ .

Докажем теперь, что выполнение условий (26) гарантирует нам существование  $X$ -насыщенного паросочетания. Предположим, что в графе  $G[X, Y]$  имеется какое-то паросочетание  $M$ , количество  $|M|$  ребер в котором строго меньше  $|X|$ . Покажем, что в этом случае мы всегда сможем построить паросочетание  $M'$  с количеством  $|M'|$  ребер, равным  $|M| + 1$ . Выберем для этого какую-то вершину  $x \in X$ , не покрытую паросочетанием  $M$ , и запустим из нее алгоритм Куна. Предположим, что в результате его работы алгоритм Куна не нашел  $M$ -дополняющий путь. В этом случае алгоритм Куна вместо такого пути выдаст нам  $M$ -чередующееся дерево (рис.63). Мы ранее отмечали, что количество  $|S|$  вершин подмножества  $S \subseteq X$ , достижимых из  $x$ , на единицу больше количества  $|T|$  вершин, достижимых из  $x$  и принадлежащих  $Y$ . Кроме того, мы показали, что в этом случае  $N(S) = T$ . Следовательно, при таком развитии событий

$$|N(S)| = |T| = |S| - 1,$$

что противоречит условиям Холла (26). □

**Следствие 11.7.** Пусть в двудольном графе  $|X| = |Y|$ , и для любого подмножества  $U$  множества  $X$  выполняются условия (26). Тогда в этом графе существует совершенное паросочетание.

**11.2.7.** Мы убедились в том, что теоремы Менгера, Форда-Фалкерсона, Кёнига-Эргевари и Холла достаточно тесно связаны между собой — из справедливости одной теоремы достаточно просто доказать справедливость остальных. К этому же классу результатов относятся и еще несколько важных именных теорем, таких, например, как теорема Дилуорса и теорема Мирского в теории частично упорядоченных множеств, матричная переформулировка теоремы Кёнига-Эргевари, теорема Биркгофа и другие (см. упражнения к этому параграфу). Каждая из них была в свое время доказана независимо от остальных, однако легче всего получить доказательства этих теорем, сводя их к одному из уже доказанных выше результатов.

## 12 Совершенные паросочетания в произвольном графе. Теорема Татта

**12.1.** Вернемся к задаче поиска совершенного паросочетания в произвольном графе  $G$ , то есть паросочетания, покрывающего все вершины графа  $G$ .

**12.1.1.** Первый и основной вопрос, возникающий при решении данной задачи, состоит в следующем: а существует ли в принципе в заданном графе  $G$  хотя бы одно совершенное паросочетание? Иными словами, нам хотелось бы понимать, какими свойствами должен обладать граф  $G$ , чтобы в нем гарантированно существовало совершенное паросочетание.

Ранее мы уже упоминали, что совершенное паросочетание невозможно построить в случае, когда количество вершин в графе нечетно. К сожалению, довольно простое условие четности вершин в графе  $G$  не гарантирует нам существование совершенного паросочетания в  $G$ . В качестве примера на рис.65, показан достаточно простые графы, построенные на четном числе вершин, совершенное паросочетание в которых отсутствует.



Рис. 65

**12.1.2.** Необходимое и достаточное условие существования в графе совершенного паросочетания было получено в 1947 году одним из создателей современной теории графов Уильямом Таттом. Прежде чем формулировать соответствующий результат, давайте поймем, из каких соображений его можно получить.

Рассмотрим произвольный граф  $G$ , в котором существует совершенное паросочетание  $M$ . Выделим в этом графе некоторое абсолютно произвольное подмножество  $S$  множества  $V(G)$  вершин графа  $G$  и удалим все вершины этого подмножества. Напомним, что при удалении вершин в графе  $G$  вместе с ними удаляются и все инцидентные им ребра. В полученном в результате такой операции графе  $G - S$  могут оказаться несколько компонент связности. Будем называть отдельную компоненту связности, содержащую четное количество вершин, *четной* компонентой, а компоненту, содержащую нечетное количество вершин — *нечетной* компонентой.

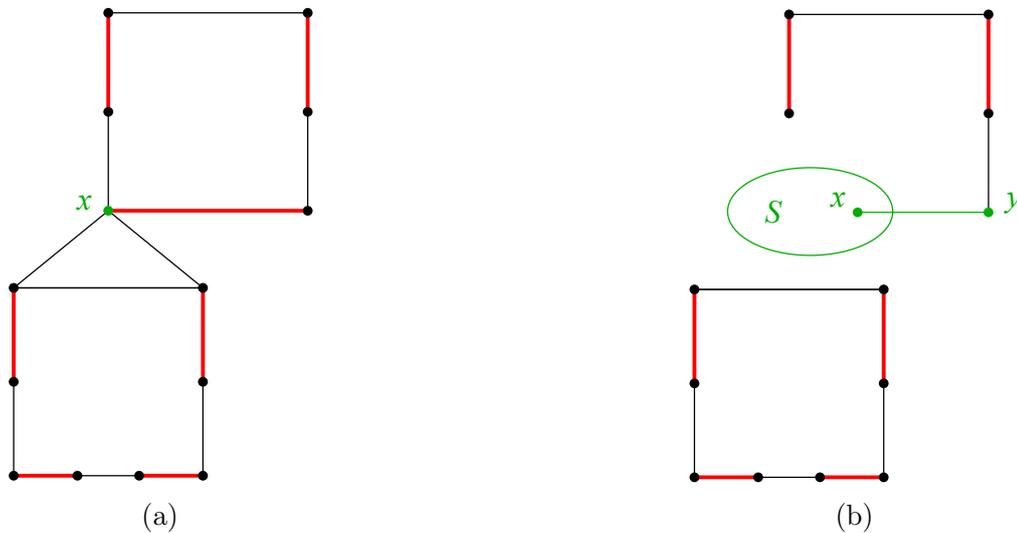


Рис. 66

На рис.66,а в качестве примера показан граф  $G$ , построенный на четырнадцати вершинах. Совершенное паросочетание  $M$  в таком графе состоит из семи ребер, помеченных красным цветом на рисунке. Включим в подмножество  $S$  единственную вершину  $x$ , помеченную зеленым цветом на рис.66,а. После удаления этой вершины исходный граф  $G$  распадется на две компоненты связности — четную и нечетную (рис. 66,б).

Давайте обратим внимание на произвольную нечетную компоненту графа  $G - S$ . В этой компоненте у нас остались ребра, входившие в исходное совершенное паросочетание  $M$ . Они, очевидно, покрывают только четное количество вершин этой компоненты. Следовательно, среди вершин рассматриваемой нечетной компоненты обязательно найдется хотя бы одна вершина  $y$ ,

покрытая в исходном графе  $G$  ребром, входящим в совершенное паросочетание  $M$  и соединяющим эту вершину  $y$  с одной из вершин удаленного подмножества  $S$  (ребро  $\{x, y\}$  на рис.66,b).

Теперь рассмотрим все нечетные компоненты графа  $G - S$ . Как мы убедились выше, из каждой такой компоненты в исходном графе  $G$  у нас обязано исходить принадлежащее  $M$  ребро, соединяющее какую-то вершину  $x$  нечетной компоненты с какой-то *своей* вершиной  $y$  подмножества  $S$ . Следовательно, количество вершин в  $S$  должно быть не меньше количества нечетных компонент связности в графе  $G - S$ :

$$c_{\text{odd}}(G - S) \leq |S| \quad \forall S \subset V(G). \quad (27)$$

Здесь  $c_{\text{odd}}(G - S)$  — количество нечетных компонент связности графа  $G - S$ .

Заметим сразу, что из условий (27) следует, в частности, тот факт, что и сам граф  $G$ , и любая его связная компонента имеют четное число вершин. Действительно, выбирая в качестве  $S$  пустое множество  $\emptyset$ , мы получаем, что  $c_{\text{odd}}(G) \leq |\emptyset| = 0$ , а это и означает, что в графе  $G$  отсутствуют компоненты связности, имеющие нечетное число вершин.

**12.1.3.** Оказывается, что условие (27) является не только необходимым, но и достаточным для существования в графе  $G$  совершенного паросочетания.

**Теорема 12.1** (Татт, 1947). *В графе  $G$  существует совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда для любого  $S \subset V(G)$  количество  $c_{\text{odd}}(G - S)$  нечетных компонент связности графа  $G - S$  не превосходит мощности  $|S|$  множества  $S$ .*

**Доказательство.** Необходимость условий (27) мы уже доказали, так что нам осталось доказать достаточность условий (27) для существования совершенного паросочетания в графе  $G$ . Доказывать это мы будем от противного. Именно, мы предположим, что у нас имеется граф  $G$ , в котором условия Татта (27) выполнены, а совершенное паросочетание отсутствует, и получим где-то противоречие.

Так как условия Татта для графа  $G$  выполнены, то этот граф построен на четном количестве вершин  $n = |V(G)|$ . Кроме того, этот граф отличен от полного графа  $K_n$  — в полном графе на четном количестве вершин совершенное паросочетание, очевидно, существует. Следовательно, в  $G$  имеется хотя бы одна пара несмежных между собой вершин. Соединим эту пару вершин ребром и покажем, что в результате этой операции условия Татта (27) не нарушатся.

Действительно, добавление к графу  $G$  ребра изменит количество нечетных компонент лишь в том случае, когда это ребро соединит две нечетные компоненты связности в графе  $G - S$ . Но при этом количество  $c_{\text{odd}}(G - S)$  таких нечетных компонент уменьшится, а количество  $|S|$  удаляемых вершин от добавления к графу ребра никак не изменится. Поэтому, если до добавления ребра условия (27) были выполнены, то они тем более останутся выполненными и после добавления к графу  $G$  ребра.

Давайте тогда возьмем исходный граф  $G$  и начнем добавлять к нему ребра, соединяющие несмежные вершины этого графа. На каком-то шаге мы обязательно придем к так называемому *насыщенному* графу  $G^*$  — графу, у которого совершенное паросочетание еще отсутствует, но прибавление к которому *любого* ребра приведет к появлению в новом графе совершенного паросочетания. Действительно, соединив все несмежные в графе  $G$  вершины, мы придем к полному графу  $K_n$  на четном количестве  $n$  вершин, в котором совершенное паросочетание гарантированно существует. Следовательно, добавляя к  $G$  ребра так, чтобы в новых графах совершенное паросочетание отсутствовало, мы на каком-то шаге обязательно придем к ситуации, когда соединить *любую* пару несмежных вершин ребром и не получить в результате этой

операции граф без совершенного паросочетания окажется невозможным, то есть придем к насыщенному графу  $G^*$ .

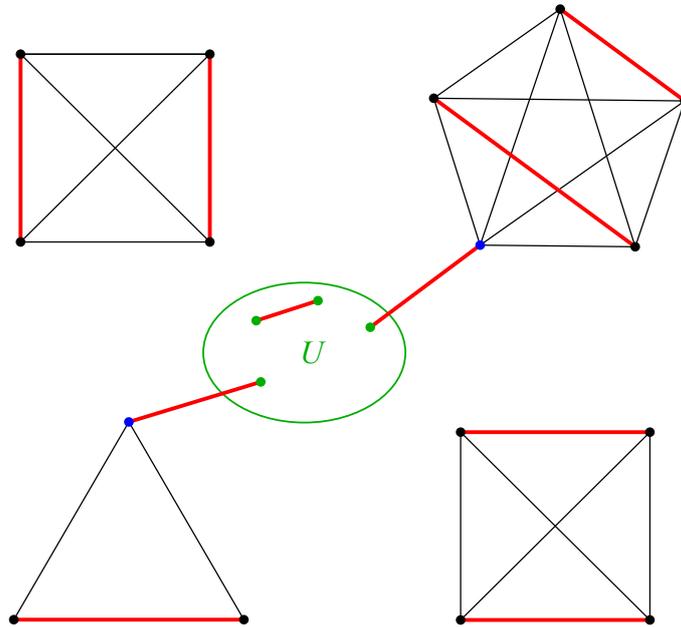


Рис. 67

Выделим теперь в полученном из  $G$  насыщенном графе  $G^*$  подмножество  $U$  вершин, каждая из которых соединена со всеми вершинами графа  $G^*$ , то есть подмножество  $U$  вершин, каждая из которых имеет степень  $n - 1$ . Ниже мы покажем (см. лемму 12.2), что граф  $G^* - U$ , полученный после удаления такого подмножества  $U$  вершин, представляет собой объединение нескольких несвязных друг с другом полных графов. Так как в силу условий (27) в графе  $G^* - U$  не более  $|U|$  нечетных компонент связности, то мы всегда сможем совершить следующие операции (см. рис.67):

1. построить в каждой компоненте связности графа  $G^* - U$ , содержащей четное число вершин, совершенное паросочетание (ребра, помеченные красным цветом на рис.67);
2. построить в каждой нечетной компоненте связности этого графа паросочетание, покрывающее все вершины, кроме одной (красные ребра на рис.67);
3. соединить каждую оставшуюся вершину в каждой из компонент нечетной связности (синие вершины на рис.67) с какой-то своей вершиной из множества  $U$ ;
4. разбить на пары оставшееся множество  $\tilde{U}$  вершин в  $U$  и соединить их ребрами (красные ребра, соединяющие пары зеленых вершин на рис.67).

Последнюю операцию мы можем совершить потому, что, во-первых, все вершины в  $\tilde{U}$  смежны друг с другом по построению множества  $U$ , а во-вторых, количество таких вершин четно. Действительно, удаляя из четного числа вершин в графе  $G^*$  вершины, входящие в компоненты с четным числом вершин, мы вновь получаем четное число. Далее, вычитая из остатка нечетное число вершин любой компоненты нечетной связности вместе с одной из вершин множества  $U$ , мы вновь получаем четное число.

Таким образом, мы построили в графе  $G^*$  совершенное паросочетание, что противоречит определению насыщенного графа. Полученное противоречие доказывает достаточность выполнения условий (27) для существования совершенного паросочетания в графе.  $\square$

**12.1.4.** Итак, для доказательства теоремы Татта нам осталось доказать следующее утверждение.

**Лемма 12.2.** Пусть  $U$  есть подмножество вершин насыщенного графа  $G^*$ , каждая из которых соединена со всеми вершинами графа  $G^*$ , то есть подмножество вершин, каждая из которых имеет степень  $n - 1$ ,  $n = |V(G^*)|$ . Тогда в графе  $G^* - U$  любая компонента связности является полным графом.

**Доказательство.** Будем доказывать это утверждение от противного. Именно, мы предположим, что это не так, то есть что в графе  $G^* - U$  имеется компонента связности, не являющаяся полным графом. В такой компоненте имеется как минимум три вершины (компоненты связности, содержащие одну или две вершины, изоморфны полным графам  $K_1$  и  $K_2$ ), и в ней обязана существовать пара несмежных между собой вершин  $a$  и  $c$ , имеющих общую смежную вершину  $b$  (см. одно из упражнений к первой главе). Наша задача — показать, что отсутствие ребра  $\{a, c\}$  противоречит насыщенности графа  $G^*$ .

Так как вершина  $b \notin U$ , то степень этой вершины отлична от  $n - 1$ . Следовательно, в графе  $G^*$  найдется хотя бы одна вершина  $d$ , несмежная с  $b$ . Так как любая вершина из  $U$  смежна со всеми вершинами графа  $G^*$ , то вершина  $d$  также принадлежит  $V(G^* - U)$ . Таким образом, отсутствие ребра  $\{a, c\}$  в графе  $G^* - U$  означает, что в таком графе имеются по меньшей мере две пары несмежных между собой вершин.

Согласно определению насыщенного графа  $G^*$ , добавление к нему любого ребра  $e$  превращает  $G^* + e$  в граф, в котором совершенное паросочетание уже существует. Важно отметить, что добавленное ребро  $e$  обязано этому совершенному паросочетанию принадлежать — в противном случае совершенное паросочетание можно было бы построить и в исходном графе  $G^*$ , что, согласно нашему предположению, невозможно.

Рассмотрим теперь графы  $G_1 := G^* + \{a, c\}$  и  $G_2 := G^* + \{b, d\}$ , полученные добавлением к графу  $G^*$  ребер  $\{a, c\}$  и  $\{b, d\}$  соответственно. Как мы заметили выше, в таких графах существуют некоторые совершенные паросочетания  $M_1$  и  $M_2$ , причем ребро  $\{a, c\}$  входит в паросочетание  $M_1$ , а ребро  $\{b, d\}$  принадлежит паросочетанию  $M_2$ . Образует симметрическую разность  $M_1 \Delta M_2 =: F$  двух паросочетаний и рассмотрим остовный подграф  $H$  графа  $G^*$  с  $E(H) = F$ . Так как паросочетания  $M_1$  и  $M_2$  являются совершенными, то любая вершина  $x \in V(G^*) = V(G_1) = V(G_2)$  покрыта как ребром  $e_1 \in M_1$ , так и ребром  $e_2 \in M_2$ . В случае, если  $e_1 = e_2$ , эта вершина остается непокрытой ребрами из  $F$ . Если же  $e_1 \neq e_2$ , то степень вершины  $x$  в  $H$  равна двум. Следовательно, любое ребро в  $H$  обязано принадлежать некоторому циклу.

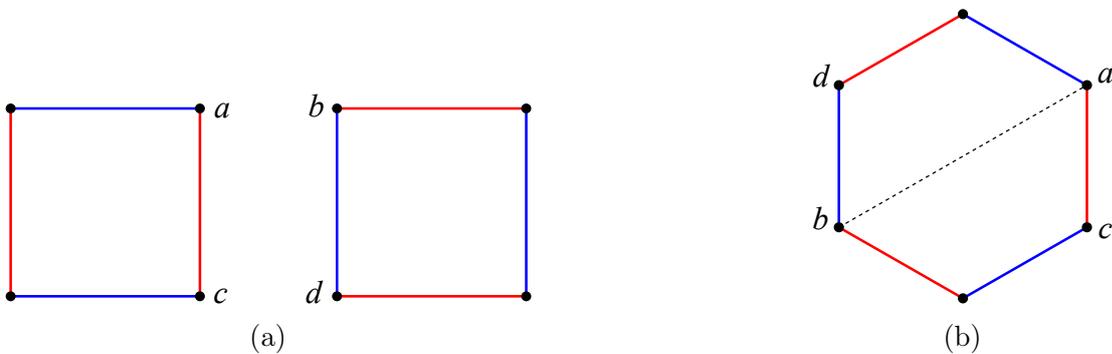


Рис. 68

Возможны два случая. В первом из них ребра  $\{a, c\}$  и  $\{b, d\}$  принадлежат двум различным цик-

лам  $C_1$  и  $C_2$  (рис.68,а). Во втором случае эти ребра лежат на одном и том же цикле  $C_1 = C_2 =: C$  (рис.68,б). Покажем, что в обоих случаях мы всегда сможем сконструировать из паросочетаний  $M_1$  и  $M_2$  некоторое новое паросочетание  $M$ , покрывающее все вершины в графе  $G^*$ . Тем самым мы получим противоречие с тем, что граф  $G^*$  является насыщенным, доказывающее лемму.

Предположим вначале, что циклы  $C_1$  и  $C_2$  различны (рис.68,а). Выделим в цикле  $C_1$  ребра, принадлежащие паросочетанию  $M_2$  (синие ребра на рис.68,а), а в цикле  $C_2$  — ребра из паросочетания  $M_1$  (красные ребра на рис.68,а). Эти ребра, во-первых, покрывают все вершины циклов  $C_1$  и  $C_2$ . Во-вторых, этот набор ребер не содержит ни ребро  $\{a, c\}$ , ни ребро  $\{b, d\}$ . Добавляя к полученному набору ребра, к примеру, паросочетания  $M_1$ , не входящие ни в цикл  $C_1$ , ни в цикл  $C_2$ , мы получаем некоторое совершенное паросочетание  $M$  в графе  $G^*$ .

Разберем теперь вариант, при котором ребра  $\{a, c\}$  и  $\{b, d\}$  принадлежат одному и тому же циклу  $C$  (рис.68,б). Будем двигаться по этому циклу от вершины  $b$  в направлении, задаваемым ребром  $\{b, d\}$ , до тех пор, пока не встретим одну из вершин ребра  $\{a, c\}$ . Пусть для определенности это будет вершина  $a$  (смотри рис.68,б). Пройденная цепочка ребер  $P_1$  начинается и заканчивается ребрами, принадлежащими паросочетанию  $M_2$  (синие ребра на 68,б). Оставшаяся же часть цикла  $C$  — цепочка  $P_2$  — ограничена ребрами паросочетания  $M_1$  (красные ребра на рисунке). Рассмотрим тогда ребро  $\{a, b\} \in E(G^*)$ , разбивающее цикл  $C$  на две половины. Добавим к нему ребра цепочки  $P_1$ , принадлежащие паросочетанию  $M_1$ , а также ребра из  $P_2$ , относящиеся к паросочетанию  $M_2$ . В результате мы получим паросочетание, покрывающее все вершины цикла  $C$  и не содержащее ни ребро  $\{b, d\}$ , ни ребро  $\{a, c\}$ . Дополняя это паросочетание ребрами из  $M_1$ , не входящими в цикл  $C$ , мы вновь получим совершенное паросочетание  $M$  в насыщенном графе  $G^*$ .  $\square$

**12.2.** Теорема Татта играет очень важную роль в теории паросочетаний. Прежде всего, она дает хорошую характеристику существования совершенного паросочетания в графе. Если такое существует, нам достаточно просто его предъявить. Если же его нет, то, согласно теореме Татта, гарантированно найдется множество  $S$ , для которого условие Татта (27) нарушается (так называемое множество Татта).

Кроме того, с помощью теоремы Татта достаточно просто доказываются разного рода достаточные условия существования совершенных паросочетаний в том или ином классе графов. Схема доказательства такого рода доказательств обычно такова: рассматривается описанная в теореме декомпозиция и предполагается, что граф не имеет совершенного паросочетания. Затем с помощью разного рода подсчетов или оценок получается то или иное противоречие.

**12.2.1.** В качестве примера такого рода рассуждений можно привести один из первых результатов теории графов, доказанный Петерсеном еще в 1891 году. Этот результат касается достаточных условий существования совершенного паросочетания в так называемом кубическом графе, то есть регулярном графе, степень  $\deg(x)$  любой вершины  $x$  которого равна трем. Исходное доказательство Петерсена было достаточно сложным. Мы же дадим более простое доказательство, опирающееся на теорему Татта.

**Теорема 12.3** (Петерсен, 1891). *Каждый кубический граф  $G$ , имеющий не более двух мостов, обладает совершенным паросочетанием.*

**12.2.2.** Прежде чем доказывать теорему Петерсена, сформулируем и докажем следующее полезное для дальнейших рассуждений утверждение.

**Лемма 12.4.** Для любого подмножества  $S$  множества  $V(G)$  вершин графа  $G$  четность числа  $c_{\text{odd}}(G - S) - |S|$  совпадает с четностью количества  $n = |V(G)|$  вершин в графе  $G$ :

$$c_{\text{odd}}(G - S) - |S| \equiv n \pmod{2}.$$

**Доказательство.** Рассмотрим произвольное подмножество  $S$  множества  $V(G)$  вершин графа  $G$ . Любое такое подмножество разбивает все множество  $V(G)$  вершин на  $c_{\text{odd}}(G - S)$  блоков  $V_i$ , отвечающих нечетным компонентам графа  $G - S$ ,  $c_{\text{even}}(G - S)$  блоков  $U_j$ , соответствующих четным компонентам графа  $G - S$ , а также на блок, состоящий из вершин самого подмножества  $S$ :

$$V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_{c_{\text{odd}}(G-S)} \cup U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_{c_{\text{even}}(G-S)} \cup S.$$

Так, для изображенного на рисунке 67 графа  $G$  и подмножества  $S$  мы имеем  $c_{\text{odd}}(G - S) = 2$  нечетных блока и  $c_{\text{even}}(G - S) = 2$  четных блока.

Количество вершин во всех блоках  $U_j$  четно, поэтому в результате удаления из графа  $G$  этих вершин мы получим количество вершин той же четности, что и  $n$ . Возьмем теперь в каждом нечетном блоке все вершины, кроме одной, и удалим эти вершины. Так как число удаляемых вершин в каждом таком блоке четно, то четность оставшегося количества вершин по-прежнему будет совпадать с четностью  $n$ .

Заметим теперь, что у нас осталось по одной вершине из каждой нечетной компоненты (вершины, помеченные синим цветом на рис.67), а также все вершины подмножества  $S$  (зеленые вершины на рис.67). Следовательно, общее количество оставшихся вершин равно  $c_{\text{odd}}(G - S) + |S|$ , и это число совпадает по четности с количеством  $n$  всех вершин:

$$c_{\text{odd}}(G - S) + |S| \equiv n \pmod{2}.$$

Вычтем теперь из числа  $c_{\text{odd}}(G - S) + |S|$  четное число, равное удвоенному количеству вершин подмножества  $S$ . Полученное в результате число  $c_{\text{odd}}(G - S) - |S|$  будет иметь ту же четность, что и число  $c_{\text{odd}}(G - S) + |S|$ , а следовательно, что и  $n$ :

$$c_{\text{odd}}(G - S) - |S| \equiv n \pmod{2}.$$

Лемма доказана.

**12.2.3.** Приступим теперь к доказательству теоремы Петерсена. Заметим, прежде всего, что в кубическом графе количество  $|V(G)|$  вершин четно — это сразу следует из первой теоремы теории графов:

$$\sum_{x \in V(G)} \deg(x) = 3 \cdot \sum_{x \in V(G)} 1 = 3|V(G)| = 2|E(G)| \quad \implies \quad |V(G)| - \text{четное число}.$$

Теперь предположим, что граф  $G$  не имеет совершенного паросочетания. Тогда, согласно условию Татта, в графе можно выделить такое подмножество  $S$  вершин, после удаления которых количество  $c_{\text{odd}}(G - S)$  нечетных компонент графа  $G - S$  оказывается больше количества  $|S|$  удаленных из графа  $G$  вершин:

$$c_{\text{odd}}(G - S) > |S| \quad \iff \quad c_{\text{odd}}(G - S) \geq |S| + 1.$$

Лемма 12.4 говорит нам о том, что разность  $c_{\text{odd}}(G - S) - |S|$  совпадает с четностью  $n$ . Так как  $n$  четно, то четна и разность  $c_{\text{odd}}(G - S) - |S|$ . Как следствие, равенство вида

$$c_{\text{odd}}(G - S) = |S| + 1$$

никогда выполняться не сможет, так что неравенство  $c_{\text{odd}}(G - S) \geq |S| + 1$  можно усилить:

$$c_{\text{odd}}(G - S) > |S| + 1 \iff c_{\text{odd}}(G - S) \geq |S| + 2.$$

**12.2.4.** Вернемся к кубическим графам. Обозначим через  $G_i$  произвольную нечетную компоненту такого графа, полученную в результате удаления из кубического графа  $G$  какого-то подмножества  $S$  вершин, а через  $m_i$  — количество ребер, соединяющих эту компоненту с подмножеством  $S$ . Покажем, что  $m_i$  обязано быть нечетным числом.

Согласно первой теореме теории графов, сумма степеней вершин в компоненте  $G_i$ , равная удвоенному количеству ребер в этой компоненте, является четным числом. Но в рассматриваемом случае сумма степеней вершин равна

$$\sum_{x \in V(G_i)} \deg(x) = 3|V(G_i)| - m_i.$$

Действительно, если бы из  $G_i$  никаких ребер в  $S$  не выходило, то каждая вершина  $G_i$  имела бы степень, равную трем, а суммарная степень вершин равнялась бы  $3|V(G_i)|$ . Однако за счет исходящих из  $G_i$  ребер у некоторых из этих вершин степень уменьшится на количество ребер, соединяющих эту вершину с вершинами множества  $S$ . Суммарное же уменьшение суммы всех степеней вершин из  $G_i$  как раз и окажется равным  $m_i$ . Таким образом, мы показали, что

$$3|V(G_i)| - m_i = 2|E(G_i)|.$$

Но количество  $|V(G_i)|$  вершин в нечетной компоненте  $G_i$  является нечетным числом, и поэтому для выполнения этого равенства  $m_i$  также обязано быть нечетным.

**12.2.5.** Заметим теперь, что в кубическом графе, имеющем не более двух мостов, не более двух чисел  $m_i$  могут равняться единице. Действительно, если бы это было не так, то у нас нашлось бы множество  $S$ , соединенное с тремя или более нечетными компонентами  $G_i$  одиночными ребрами. Такие ребра образуют мосты в исходном графе  $G$ , а их, по условию, не должно быть больше двух.

Просуммируем теперь числа  $m_i$  по всем нечетным компонентам  $G_i$ , образующимся после удаления в графе  $G$  подмножества  $S$  вершин. В случае, когда все  $m_i \geq 3$ , мы получаем неравенство вида

$$\sum_i m_i \geq 3c_{\text{odd}}(G - S).$$

В случае, когда ровно одна  $m_i = 1$ , аналогичное неравенство принимает вид

$$\sum_i m_i \geq 3(c_{\text{odd}}(G - S) - 1) + 1 = 3c_{\text{odd}}(G - S) - 2.$$

Наконец, в случае, когда ровно два числа  $m_i = 1$ , наша оценка на сумму  $m_i$  выглядит так:

$$\sum_i m_i \geq 3(c_{\text{odd}}(G - S) - 2) + 2 = 3c_{\text{odd}}(G - S) - 4.$$

Итак, в самом худшем для нас случае сумма чисел  $m_i$  больше или равна  $3c_{\text{odd}}(G - S) - 4$ . Но ранее мы показали, что  $c_{\text{odd}}(G - S) \geq |S| + 2$ . Сравнивая эти два неравенства, мы получаем, что

$$\sum_i m_i \geq 3|S| + 2.$$

Однако такое неравенство выполняться не может — максимальное количество ребер, которое может исходить из  $S$ , равно  $3|S|$ . Мы же получили, что количество ребер, соединяющих  $S$  только с нечетными компонентами, строго больше  $3|S| + 1$ . Полученное противоречие завершает доказательство теоремы Петерсена.

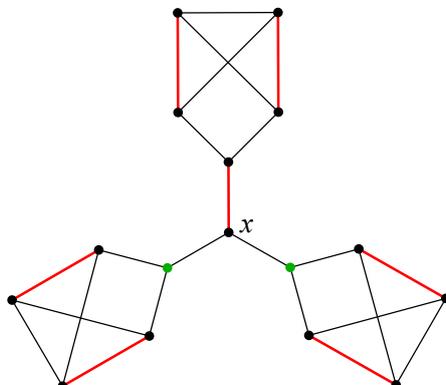


Рис. 69: Граф Сильвестра

**12.2.6.** Заметим, что условие “не более двух мостов” является существенным — так, изображенный на рис.69 кубический граф (граф Сильвестра), имеющий три моста, совершенного паросочетания не имеет. Действительно, после удаления единственной вершины  $x$  в графе  $G - \{x\}$  образуется три нечетных компонента, то есть для такого графа условие Татта уже не выполняется.

**12.2.7.** Рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы Петерсена, можно использовать и при доказательстве других утверждений, связанных с совершенными паросочетаниями в графах. В частности, более-менее похоже доказывается следующий результат (см. упражнение ??).

**Теорема 12.5** (Плесник, 1972). Пусть  $G$  есть  $k$ -регулярный и  $(k - 1)$ -реберносвязный граф с четным числом вершин. Тогда в графе  $G'$ , полученном из  $G$  удалением не более, чем  $(k - 1)$  ребер, существует совершенное паросочетание.

**12.3.** Приведенное выше доказательство теоремы Татта основывалось исключительно на соображениях, связанных с теорией графов. Сам Татт пришел к этой теореме, используя некоторые факты из линейной алгебры, связанные с определителями кососимметрической матрицы.

**12.3.1.** Напомним, что определитель  $\det(T)$  матрицы  $T$  рассчитывается по формуле

$$\det(T) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot x_{1\sigma(1)} \cdot x_{2\sigma(2)} \cdot \dots \cdot x_{n\sigma(n)}.$$

Здесь  $\sigma \in S_n$  — произвольная перестановка  $n$ -элементного множества  $[n]$ ,  $x_{ij}$  — элементы матрицы  $T$ .

Рассмотрим теперь кососимметрическую матрицу вида

$$T = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ -x_{12} & 0 & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -x_{1n} & -x_{2n} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Известно, что определитель такой матрицы  $\det(T)$  тождественно равен нулю в случае нечетного  $n$ . Действительно, так как

$$\det(T) = \det(T^T) = \det(-T) = (-1)^n \det(T),$$

то в случае  $n = 2k + 1$  из равенства  $\det(T) = -\det(T)$  следует, что  $\det(T) = 0$ .

В линейной алгебре (а также в комбинаторике, см., например, [?]) доказывалось, что в случае четного  $n$  определитель  $\det(T)$  можно записать в виде  $[\text{pf}(T)]^2$ , где  $\text{pf}(T)$  представляет собой полином специального вида от переменных  $x_{ij}$ , называемый *пфаффианом* матрицы  $T$ .

**Определение 12.6.** Рассмотрим множество  $\Pi$  всех  $(2n - 1)!!$  разбиений множества  $[2n]$  на блоки размера 2. Каждое из таких разбиений можно записать в виде

$$\alpha = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_n, j_n)\}, \quad \text{где } i_k < j_k, \quad 1 = i_1 < i_2 < \dots < i_n.$$

Для любого разбиения  $\alpha \in \Pi$  введем перестановку  $\sigma_\alpha$ , действующую по следующему правилу:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n-1 & 2n \\ i_1 & j_1 & i_2 & j_2 & \dots & i_n & j_n \end{pmatrix}.$$

Тогда пфаффиан  $\text{pf}(T)$  матрицы  $T$  определяется по формуле

$$\text{pf}(T) = \sum_{\alpha \in \Pi} \text{sign}(\sigma_\alpha) \cdot x_{i_1 j_1} \cdot x_{i_2 j_2} \cdot \dots \cdot x_{i_n j_n}.$$

**Теорема 12.7.** *Определитель кососимметрической матрицы  $T$  размером  $2n \times 2n$  равен квадрату пфаффиана этой матрицы:*

$$\det(T) = [\text{pf}(T)]^2. \quad (28)$$

В качестве примера рассмотрим случай  $n = 2$ . Множество  $\{1, 2, 3, 4\}$  допускает три различных разбиения на блоки размера два — разбиения

$$\alpha_1 = \{(1, 2), (3, 4)\}, \quad \alpha_2 = \{(1, 3), (2, 4)\}, \quad \alpha_3 = \{(1, 4), (2, 3)\}.$$

Соответствующие этим разбиениям перестановки  $\sigma_\alpha$  имеют вид

$$\sigma_{\alpha_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{\alpha_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{\alpha_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

так что соответствующий им пфаффиан записывается так:

$$\text{pf}(T) = x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23}.$$

Несложно убедиться, что квадрат этого пфаффиана даст нам определитель матрицы

$$T = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ -x_{12} & 0 & x_{23} & x_{24} \\ -x_{13} & -x_{23} & 0 & x_{34} \\ -x_{14} & -x_{24} & -x_{34} & 0 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Действительно,

$$\det(T) = x_{12}^2 x_{34}^2 + x_{13}^2 x_{24}^2 + x_{14}^2 x_{23}^2 - 2x_{12}x_{34}x_{13}x_{24} - 2x_{12}x_{34}x_{14}x_{23} - 2x_{13}x_{24}x_{14}x_{23} = [\text{pf}(T)]^2.$$

**12.3.2.** Вернемся к паросочетаниям в графах. Татт заметил, что имеется взаимно-однозначное соответствие между множеством всех совершенных паросочетаний в полном графе  $K_{2n}$  на  $2n$  вершинах и набором всех слагаемых в пфаффиане  $\text{pf}(T)$  кососимметрической матрицы  $T[2n, 2n]$ . При этом сами элементы  $x_{ij}$ ,  $1 \leq i < j \leq 2n$ , матрицы  $T$  отвечают ребрам графа  $K_{2n}$ , соединяющим вершины  $i$  и  $j$  этого графа.

Рассмотрим в качестве примера полный граф  $K_4$ . Соответствующая ему кососимметрическая матрица  $T$  имеет вид (29), а ее определитель рассчитывается по формуле

$$\det(T) = [x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23}]^2.$$

Слагаемое  $x_{12}x_{34}$  отвечает совершенному паросочетанию, состоящему из ребер  $\{1, 2\}$  и  $\{3, 4\}$  графа  $K_4$ , слагаемое  $x_{13}x_{24}$  — совершенному паросочетанию  $\{1, 3\}, \{2, 4\}$ , а слагаемое  $x_{14}x_{23}$  — совершенному паросочетанию  $\{1, 4\}, \{2, 3\}$  в графе  $K_4$ .

Рассмотрим теперь произвольный граф  $G$ , построенный на  $2n$  вершинах. Сопоставим этому графу кососимметрическую матрицу  $T[2n, 2n]$ , элементы  $x_{ij}$ ,  $1 \leq i < j \leq 2n$  которой отличны от нуля в случае, если между вершинами  $i$  и  $j$  имеется ребро  $\{i, j\}$ , и равны нулю в противном случае. Такая матрица  $T(G)$ , построенная для произвольного графа  $G$ , называется теперь *матрицей Татта*. Определитель этой матрицы по-прежнему выражается через пфаффиан  $\text{pf}(T)$ , любое слагаемое которого отвечает некоторому совершенному паросочетанию в графе  $G$ . Случаю равенства нулю всех слагаемых в  $\text{pf}(T)$  отвечает отсутствие совершенного паросочетания в графе  $G$ .



Рис. 70

В качестве примера рассмотрим графы  $G_1$  и  $G_2$ , показанные на рис.70. Матрицы Татта для таких графов имеют вид

$$T(G_1) = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ -x_{12} & 0 & x_{23} & x_{24} \\ -x_{13} & -x_{23} & 0 & 0 \\ -x_{14} & -x_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T(G_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x_{14} \\ 0 & 0 & 0 & x_{24} \\ 0 & 0 & 0 & x_{34} \\ -x_{14} & -x_{24} & -x_{34} & 0 \end{pmatrix}.$$

Для матрицы Татта  $T(G_1)$ , отвечающей графу  $G_1$ , показанному на рис.70,а, определитель матрицы Татта равен

$$\det(T) = x_{13}^2 x_{24}^2 + x_{14}^2 x_{23}^2 - 2x_{13}x_{14}x_{23}x_{24} = [\text{pf}(T)]^2, \quad \text{pf}(T) = x_{14}x_{23} - x_{13}x_{24}.$$

Следовательно, в графе  $G_1$  найдутся два совершенных паросочетания — совершенное паросочетание, состоящее из ребер  $\{1, 3\}, \{2, 4\}$ , а также совершенное паросочетание, ребра которого есть  $\{1, 4\}, \{2, 3\}$ . В случае же графа  $G_2$ , показанного на рис.70,б, определитель матрицы Татта

$$\det(T) = 0 = [\text{pf}(T)]^2, \quad \text{pf}(T) = 0 \cdot x_{34} - 0 \cdot x_{24} + 0 \cdot x_{14},$$

поэтому в таком графе совершенные паросочетания отсутствуют.

**12.3.3.** Ласло Ловас заметил, что отмеченное Таттом взаимно-однозначное соответствие между слагаемыми пфаффиана и совершенными паросочетаниями в графе можно использовать для быстрой оценки наличия совершенного в графе. Для этого он предложил заменить все ненулевые переменные  $x_{ij}$  матрицы Татта случайными числами. При такой замене отличный от нуля пфаффиан  $\text{pf}(T)$  с высокой вероятностью останется отличным от нуля и наоборот. Повторяя этот тест несколько раз, мы можем повысить нашу уверенность в существовании или в отсутствии совершенного паросочетания в рассматриваемом графе  $G$ .

**12.4.** Мы заметили выше, что каждое из слагаемых пфаффиана  $\text{pf}(T)$  отвечает тому или иному совершенному паросочетанию в графе  $G$ . Как следствие, пфаффиан позволяет нам не только отвечать на вопрос о существовании совершенного паросочетания, но и определять количество таких паросочетаний. Однако с практической точки зрения вычисление пфаффиана, зависящего от символьных переменных  $x_{ij}$ , представляет собой достаточно сложную задачу. Все было бы значительно проще, если бы мы смогли заменить  $x_{ij}$  на 1 или  $-1$  так, чтобы каждое из слагаемых в пфаффиане получило одинаковый знак — например, стало бы положительным. При такой замене мы смогли бы подсчитать количество  $m(G)$  совершенных паросочетаний по формуле

$$m(G) = \sqrt{\det(A)}, \quad \text{где } A = (a_{ij}), \quad a_{ij} = \pm 1 \text{ или } 0.$$

Для этого мы, прежде всего, должны научиться каким-то образом изменять знаки выражений в пфаффиане. Татт заметил, что это можно делать, переходя от неориентированного графа  $G$  к ориентированному графу  $D$ , то есть задавая каким-то образом ориентацию у каждого ребра  $e \in E(G)$ . При этом элементы  $a_{ij}$  матрицы  $A(D)$  полагаются равными

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (i, j) \in E(D), \\ -1, & \text{если } (j, i) \in E(D), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Как мы уже сказали, нас интересует не произвольная ориентация ребер, а лишь такая, при которой каждое из слагаемых в пфаффиане имеет один и тот же знак (например, оказывается положительным).

**Определение 12.8.** Ориентация  $D$  графа  $G$ , при которой все слагаемые в пфаффиане  $P$  оказываются одного и того же знака, называется пфаффовою ориентацией. Граф, допускающий пфаффову ориентацию, также называется пфаффовым.

К сожалению, в случае произвольного графа пфаффова ориентация существует далеко не всегда. Как следствие, в общем случае эта идея не проходит. Однако в 1967 году P.Kasteleyn удалось доказать наличие такой ориентации для случая планарных графов. В главе, посвященной таким графам, мы докажем следующий результат.

**Теорема 12.9** (Kasteleyn, 1967). *Любой планарный граф допускает пфаффову ориентацию, которая может быть построена за полиномиальное время.*

Следствием этого важного результата является тот факт, что в любом планарном графе  $G$  возможно за полиномиальное время подсчитать количество совершенных паросочетаний по формуле

$$m(G) = \sqrt{\det A}.$$

**12.5.** Любое совершенное паросочетание  $M$  в графе  $G$  индуцирует в нем 1-регулярный остовный подграф, который еще называют 1-фактором графа  $G$ . Естественным обобщением этого понятия является так называемый  $k$ -фактор графа, под которым понимают остовный  $k$ -регулярный подграф графа  $G$ . Мы уже встречались с такими подграфами в главе, посвященной циклам в графах. Настало время поговорить о критериях существования подобного рода объектов.

**12.5.1.** В начале данного параграфа мы доказали необходимое и достаточное условие существования совершенного паросочетания в графе  $G$  — теорему Татта. Возникает вопрос, возможно ли получить критерий существования  $k$ -фактора графа  $G$  для случая  $k > 1$ . Блестящий ответ этот довольно-таки нетривиальный вопрос дал Уильям Татт — в 1954 году ему удалось свести эту задачу к уже известной задаче поиска совершенного паросочетания в произвольном графе  $G$ . Более того, он решил эту задачу для совсем уж общего случая, рассмотрев так называемый  $f$ -фактор графа.

**Определение 12.10.** Предположим, что на множестве  $V(G)$  вершин графа  $G$  задана функция  $f$ , принимающая целые неотрицательные значения.  $f$ -фактором графа  $G$  называется такой его подграф  $H$ , у которого  $\deg_H(x) = f(x)$  для любой вершины  $x \in V(G)$ .

Понятно, что в случае  $f(x) = k$  для любой вершины  $x \in V(G)$  мы получаем  $k$ -фактор графа  $G$ .

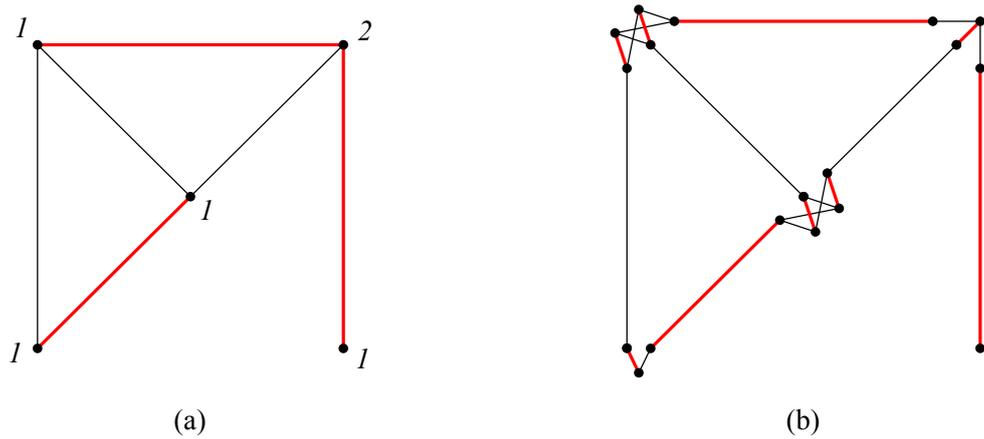


Рис. 71

Давайте теперь вслед за Таттом покажем, что проблема существования в графе  $f$ -фактора может быть сведена к проверке существования совершенного паросочетания в некотором графе  $H$ , который можно конструктивно построить из  $G$ .

Заметим, прежде всего, что необходимым условием существования  $f$ -фактора графа  $G$  является выполнение неравенства  $f(x) \leq \deg(x)$  для любого  $x \in V(G)$  — в противном случае  $f$ -фактор в графе существовать точно не сможет. Будем считать, что это условие у нас выполнено. Обозначим тогда через  $d'(x)$  величину, равную  $d(x) - f(x)$ ,  $d(x) = \deg(x)$ , и построим по  $G$  новый граф  $H$ , в котором каждая вершина  $x$  заменена на полный двудольный подграф  $K_{d(x), d'(x)}$  с долями  $X(x)$ ,  $|X(x)| = \deg(x)$ , и  $Y(x)$ ,  $|Y(x)| = d'(x)$  (см.рис.71; числа при вершинах графа  $G$ , изображенного на рис.71,а, задают функцию  $f(x)$ , определяющую  $f$ -фактор графа  $G$ ). Затем соединим каждую вершину из доли  $X(x)$  с вершинами из  $Y(y_i)$ ,  $i = 1, \dots, d$ , где  $y_i$  — смежные с  $x$  вершины в исходном графе  $G$  (см.рис.71,б).

**Теорема 12.11** (W. Tutte, 1954). *Граф  $G$  имеет  $f$ -фактор тогда и только тогда, когда в построенном описанным выше способом графе  $H(G)$  имеется совершенное паросочетание.*

**Доказательство.** Предположим вначале, что в графе  $G$  существует  $f$ -фактор. В графе  $H(G)$  соответствующие ребра будут покрывать  $f(x)$  вершин в каждом полном двудольном графе  $K_{d(x),d'(x)}$ . Покрывая оставшиеся  $2d'(x)$  вершин в каждом из этих двудольных графов ребрами некоторого паросочетания  $M'$  размера  $d'(x)$ , мы получаем совершенное паросочетание в  $H(G)$ .

Наоборот, предположим, что у нас в графе  $H(G)$  имеется совершенное паросочетание  $M$ . Стянем тогда все вершины, принадлежащие доле  $X$ ,  $|X| = d(x)$ , каждого полного двудольного графа  $K_{d(x),d'(x)}$ , в одну вершину, и удалим все вершины, принадлежащие доле  $Y$  с  $|Y| = d'(x)$ . В результате из  $H(G)$  получим граф  $G$ , в котором оставшиеся ребра из  $M$  образуют  $f$ -фактор.  $\square$

## 13 Максимальные паросочетания в произвольном графе. Структурная теорема Галлаи-Эдмондса. Алгоритм Эдмондса

**13.1.** Теперь перейдем к рассмотрению графов, в которых совершенные паросочетания отсутствуют.

**13.1.1.** Предположим, что в графе  $G$  совершенное паросочетание отсутствует. Последнее, на основании теоремы Татта, означает, что в графе  $G$  найдутся такие подмножества  $S$ , для которых

$$c_{\text{odd}}(G - S) - |S| > 0.$$

**Определение 13.1.** Подмножество  $B \subseteq V(G)$ , на котором достигается максимум функции  $c_{\text{odd}}(G - S) - |S|$ , называется барьером.

Рассмотрим теперь в графе  $G$  какое-то максимальное паросочетание  $M$ ,  $|M| = \alpha'(G)$ . Так как это паросочетание совершенным не является, то оно оставляет непокрытым часть вершин графа  $G$ .

**Определение 13.2.** Дефицитом  $\text{def}(G)$  графа  $G$  называется количество его вершин, не покрытых максимальным паросочетанием  $M$ :

$$\text{def}(G) := |V(G)| - 2|M| = n - 2\alpha'(G).$$

Оказывается, для любого графа  $G$  имеется очень интересная связь между дефицитом графа и максимумом функции  $c_{\text{odd}}(G - S) - |S|$ .

**Теорема 13.3** (Берж, 1958). *Для любого графа  $G$  справедливо равенство*

$$\text{def}(G) = \max_{S \subseteq V(G)} [c_{\text{odd}}(G - S) - |S|]. \quad (30)$$

**13.1.2.** Прежде чем доказывать эту теорему, давайте вначале поймем, в чем ее смысл, а также в чем состоит важность этой теоремы с практической точки зрения. Заметим, прежде всего, что с учетом равенства  $\text{def}(G) = n - 2\alpha'(G)$  формулу (30) можно переписать в следующем виде:

$$\alpha'(G) = \frac{1}{2} \min_{S \subseteq V(G)} \{n - (c_{\text{odd}}(G - S) - |S|)\}. \quad (31)$$

Рассмотрим теперь произвольное паросочетание  $M$  в графе  $G$  и произвольное подмножество  $S$  множества  $V(G)$  вершин этого графа.

**Лемма 13.4.** *Для любого паросочетания  $M$  в графе  $G$  и произвольного подмножества  $S$  множества  $V(G)$  вершин этого графа справедливо неравенство*

$$|M| \leq \frac{1}{2} (n - (c_{\text{odd}}(G - S) - |S|)). \quad (32)$$

**Доказательство.** Разобьем входящие в паросочетание  $M$  ребра на два блока — блок, содержащий ребра  $e \in M$ , оба конца которых принадлежат  $G - S$ , и блок, в котором хотя бы один конец  $e \in M$  принадлежит  $S$ . Количество  $k_S$  ребер во втором блоке ограничен сверху размером множества  $S$  — максимум  $k_S$  достигается в случае, когда каждая вершина подмножества  $S$  соединена в  $G$  ребром  $e \in M$  с некоторой (нечетной) компонентой графа  $G - S$ . Максимальное же значение числа  $k_C$  ребер в первом блоке достигается в случае, когда ребра из  $M$  покрывают каждую вершину в любой из четных компонент графа  $G - S$  и все кроме одной вершины в каждой из нечетных компонент графа  $G - S$ . Следовательно,

$$k_C \leq \frac{|V(G)| - |S| - c_{\text{odd}}(G - S)}{2},$$

а отсюда с учетом  $k_S \leq |S|$  и  $|M| = k_S + k_C$  мы и получаем нужное нам неравенство (32).  $\square$

Доказанная лемма говорит нам о том, что у нас имеются две связанные между собой экстремальные задачи — задача поиска максимального паросочетания в графе  $G$  и задача поиска в этом графе барьера  $B$ , то есть подмножества множества  $V(G)$  вершин, доставляющего минимум функции, стоящей в правой части неравенства (32). При этом очевидным следствием этой леммы является условие слабой оптимальности вида

$$\alpha'(G) \leq \frac{1}{2} \min_{S \subseteq V(G)} \{n - (c_{\text{odd}}(G - S) - |S|)\}.$$

Как и любое другое условие слабой оптимальности, его можно использовать для доказательства того, что то или иное паросочетание  $M$  является максимальным. Именно, если нам удалось найти такое  $M$  и такое подмножество  $B \subseteq V(G)$ , для которых неравенство (32) обращается в равенство, то  $M$  гарантированно является максимальным паросочетанием, а  $B$  — барьером в графе  $G$ .

В качестве примера рассмотрим граф Сильвестра, показанный на рис.69. Помеченное красным цветом паросочетание  $M$  оставляет непокрытыми две вершины такого графа. Нам хочется доказать, что это паросочетание является максимальным. Для этого заметим, что после удаления центральной вершины  $x$  графа  $G$  мы получаем три нечетные компоненты в графе  $G - S$ ,  $S = \{x\}$ . Отсюда на основании формулы (30) мы заключаем, что  $M$  действительно является максимальным паросочетанием, а подмножество  $B = \{x\}$  — барьером для этого графа.

Заметим теперь, что мы уже имели оценку сверху на  $\alpha'(G)$  в терминах вершинного покрытия — именно, в первом параграфе мы доказали, что  $\alpha'(G) \leq \beta(G)$ . Основная проблема с этой оценкой состоит в том, что в общем случае это неравенство может оказаться строгим. При этом мы знаем, что в частном случае двудольного графа такой неприятности произойти не может — в этом случае мы гарантированно имеем равенство  $\alpha'(G) = \beta(G)$ . Последний факт позволяет нам, в частности, построить эффективный алгоритм поиска максимального паросочетания в двудольном графе — алгоритм Куна.

Вернемся теперь к теореме Бержа, а точнее, к ее переформулировке — равенству (31), часто называемому формулой Татта-Бержа. Эта формула, по сути, представляет собой условие сильной оптимальности — оно говорит нам о том, что в отличие от условия  $\alpha'(G) \leq \beta(G)$  количество  $\alpha'(G)$  ребер в максимальном паросочетании обязано совпадать с минимумом функции, стоящей в правой части неравенства (32), для любого, не обязательно двудольного графа  $G$ . И, как мы покажем чуть ниже, именно это условие позволит нам построить эффективный алгоритм поиска максимального паросочетания в произвольном графе  $G$ .

**13.1.3.** Приступим к доказательству теоремы Бержа. С учетом леммы 13.4 нам достаточно убедиться в справедливости обратного неравенства

$$\alpha'(G) \geq \frac{1}{2} \min_{S \subset V(G)} \{n - (c_{\text{odd}}(G - S) - |S|)\} = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \max_{S \subset V(G)} \{c_{\text{odd}}(G - S) - |S|\}.$$

Следствием леммы 12.4 является тот факт, что четность числа

$$m = \max_{S \subset V(G)} [c_{\text{odd}}(G - S) - |S|] = c_{\text{odd}}(G - B) - |B|$$

совпадает с четностью количества  $n$  вершин в графе. Кроме того, величина  $m$  всегда больше или равна нулю. Действительно, выбирая в качестве подмножества  $S$  пустое подмножество, мы получаем неравенство  $c_{\text{odd}}(G) \geq 0$ , а значит,  $m \geq c_{\text{odd}}(G) \geq 0$ .

Добавим тогда к исходному графу  $G$  подмножество  $W$ , состоящего из  $m$  новых вершин, и соединим каждую вершину подмножества  $W$  со всеми остальными вершинами — как новыми, так и старыми (рис.72). В полученном таким образом графе  $\tilde{G}$  имеется достаточно большое количество ребер, поэтому есть шанс, что в нем существует совершенное паросочетание. Покажем, что это действительно так.

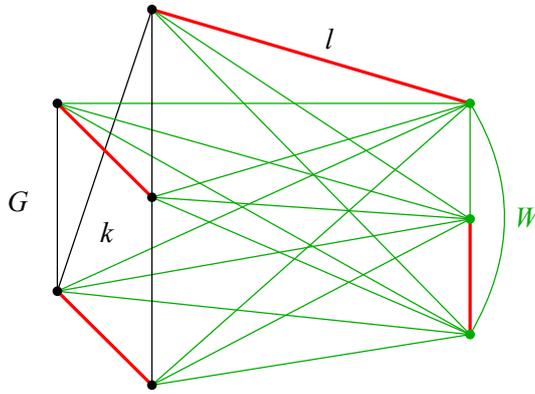


Рис. 72

Заметим, прежде всего, что необходимое условие существования совершенного паросочетания в графе  $\tilde{G}$  выполняется — так как четность чисел  $m$  и  $n = |V(G)|$  совпадает, то количество  $|V(\tilde{G})| = n + m$  вершин в новом графе  $\tilde{G}$  четно. Иными словами, для подмножества  $T = \emptyset$  условие Татта (27) в графе  $\tilde{G}$  выполняется. Покажем, что эти условия выполняются и для любого подмножества  $T \neq \emptyset$ .

Если при удалении подмножества  $T$  вершин останется хотя бы одна вершина из множества  $W$ , то граф  $\tilde{G} - T$  останется связным, и условие (27) выполнено:

$$c_{\text{odd}}(\tilde{G} - T) \leq 1 \leq |T|.$$

В противном случае, то есть в случае, когда  $T = W \cup S$ ,  $S \subset V(G)$ , мы по построению графа  $\tilde{G}$  получаем, что  $\tilde{G} - T = G - S$ , и поэтому

$$c_{\text{odd}}(\tilde{G} - T) = c_{\text{odd}}(G - S).$$

Но

$$c_{\text{odd}}(G - S) - |S| \leq c_{\text{odd}}(G - B) - |B| = m,$$

поэтому

$$c_{\text{odd}}(\tilde{G} - T) = c_{\text{odd}}(G - S) \leq m + |S| = |W \cup S| = |T|.$$

**13.1.4.** Итак, для графа  $\tilde{G}$  условия Татта (27) выполняются, то есть в таком графе существует совершенное паросочетание  $\tilde{M}$  (ребра, окрашенные в красный цвет на рис.72). Обозначим через  $l$  количество ребер в паросочетании  $\tilde{M}$ , исходящих из  $W$  в  $G$  (см.рис.72). Так как в  $W$  содержится  $m$  вершин, то  $l \leq m$ .

Пусть теперь  $k$  есть количество ребер в  $\tilde{M}$ , оба конца которых лежат в  $G$  (рис.72). Ясно, что

$$2k = n - l.$$

Так как эти  $k$  ребер образуют какое-то паросочетание в исходном графе  $G$ , то  $k \leq |M|$ , где  $M$  — максимальное паросочетание в графе  $G$ ,  $|M| = \alpha'(G)$ . Следовательно,

$$2\alpha'(G) \geq 2k = n - l \geq n - m.$$

Теорема Бержа доказана. □

**13.2.** Мы убедились, что любое максимальное паросочетание в графе  $G$  тесным образом связано с некоторым барьером в графе — подмножеством  $B$  множества  $V(G)$  вершин, доставляющего максимум функции  $f(S) = c_{\text{odd}}(G - S) - |S|$ . В принципе, в графе  $G$  может существовать несколько различных барьеров. Более того, эти барьеры могут иметь разное количество элементов. Изучим некоторые полезные свойства таких барьеров.

**13.2.1.** Нас будут интересовать не все барьеры, а лишь те, количество вершин в которых максимально. Такие барьеры мы в дальнейшем будем называть максимальными.

**Лемма 13.5.** Пусть  $T$  — некоторый максимальный барьер в графе  $G$ . Тогда все компоненты графа  $G - T$  нечетны.

**Доказательство.** Действительно, в противном случае мы можем рассмотреть произвольное остовное дерево в одной из четных компонент  $G_i$  графа  $G - T$ . Добавляя к  $T$  любой из листов  $x$  этого дерева, мы получим, во-первых, нечетную компоненту  $G_i - x$ , а во-вторых, барьер  $T \cup \{x\}$  на единицу большего размера с тем же дефицитом, что и у  $T$ , что невозможно. □

**13.2.2.** Введем еще одно полезное для дальнейших рассуждений понятие.

**Определение 13.6.** Граф  $G$  называется *фактор-критическим*, если для любой вершины  $x \in V(G)$  в графе  $G - x$  имеется совершенное паросочетание.

**Замечание 13.7.** Так как в графе  $G - x$  имеется совершенное паросочетание, то в нем четное количество вершин. Как следствие, в самом графе  $G$  количество вершин нечетно. Иными словами, в фактор-критическом графе совершенное паросочетание гарантированно отсутствует.

Характерными примерами фактор-критических графов являются полный граф  $K_{2n+1}$  на нечетном числе вершин, а также цикл  $C_{2n+1}$  нечетной длины.

**Лемма 13.8.** *Пусть  $T$  — максимальный барьер в графе  $G$ . Тогда любая компонента  $C$  связности графа  $G - T$  является фактор-критическим графом.*

**Доказательство.** Как мы знаем из предыдущей леммы, компонента  $C$  содержит нечетное количество вершин. Пусть  $x$  есть произвольная вершина графа  $C$ . Проверим, что для графа  $C - x$  выполняются условия Татта.

Возьмем для этого произвольное подмножество  $S$  множества  $V(C - x)$  и рассмотрим величину  $c_{\text{odd}}(G - T - x - S)$ . Несложно убедиться в том, что

$$c_{\text{odd}}(G - T - x - S) = c_{\text{odd}}(G - T) - 1 + c_{\text{odd}}(C - x - S).$$

Действительно, количество нечетных компонент в графе  $G - T - x - S$  равно количеству этих компонент в графе  $G - T$  за вычетом компоненты  $C$ , плюс количество нечетных компонент, образующихся из  $C$  в процессе удаления  $x$  и  $S$ . Как следствие,

$$c_{\text{odd}}(G - T - x - S) - (|T| + 1 + |S|) = c_{\text{odd}}(G - T) - |T| + c_{\text{odd}}(C - x - S) - |S| - 2.$$

Теперь заметим, что  $T$  — максимальный барьер, а значит, подмножество  $T \cup \{x\} \cup S$  барьером уже не является. Как следствие,

$$c_{\text{odd}}(G - T - x - S) - (|T| + 1 + |S|) < c_{\text{odd}}(G - T) - |T|.$$

Более того, на основании леммы 12.4, оба этих числа имеют одну и ту же четность, так что

$$c_{\text{odd}}(G - T - x - S) - (|T| + 1 + |S|) = c_{\text{odd}}(G - T) - |T| + c_{\text{odd}}(C - x - S) - |S| - 2 \leq c_{\text{odd}}(G - T) - |T| - 2.$$

Следовательно,

$$c_{\text{odd}}(C - x - S) - |S| \leq 0,$$

так что для графа  $C - x$  условия Татта выполняются.  $\square$

**13.2.3.** Далее в этом параграфе нам понадобится и еще один технический результат, связанный с максимальным барьером  $T$ . Оказывается, по любому такому барьеру мы можем построить вспомогательный двудольный граф  $H(T)$ , обладающий довольно интересными свойствами.

Именно, возьмем в качестве вершин доли  $X$  графа  $H(T)$  вершины подграфа  $T$  (вершины, помеченные зеленым цветом на рис. 73). Вершинам доли  $Y$  графа  $H(T)$  (вершины, помеченные синим цветом на рис. 73(b)) будут отвечать нечетные компоненты  $G_i$  графа  $G - T$  (см. подграфы  $G_i$ , помеченные синими пунктирными линиями на рис. 73(a)). Ребро  $\{x, y\}$  в таком графе мы проведем в случае, если в графе  $G$  найдется ребро из вершины  $x$  в отвечающую  $y$  компоненту  $G_i$ .

**Лемма 13.9.** *Пусть  $T$  — максимальный барьер в графе  $G$ . Тогда в графе  $H(T)$  найдется  $X$ -насыщенное паросочетание.*

**Доказательство.** Зафиксируем произвольное подмножество  $S \subseteq X$  (вершины  $x_2, x_3$  на рис. 73(b)) и рассмотрим подмножество  $Y \setminus N(S)$  мощности  $|Y| - |N(S)|$  (вершины  $y_1, y_6$  на рис. 73(b)). По построению, каждой вершине  $y_i$  этого подмножества отвечает нечетная компонента  $G_i$  в графе  $G - (T \setminus S)$ ,  $|T \setminus S| = |T| - |S|$ . Удаляя подмножество вершин  $T \setminus S$  (вершины  $x_1, x_4, x_5$

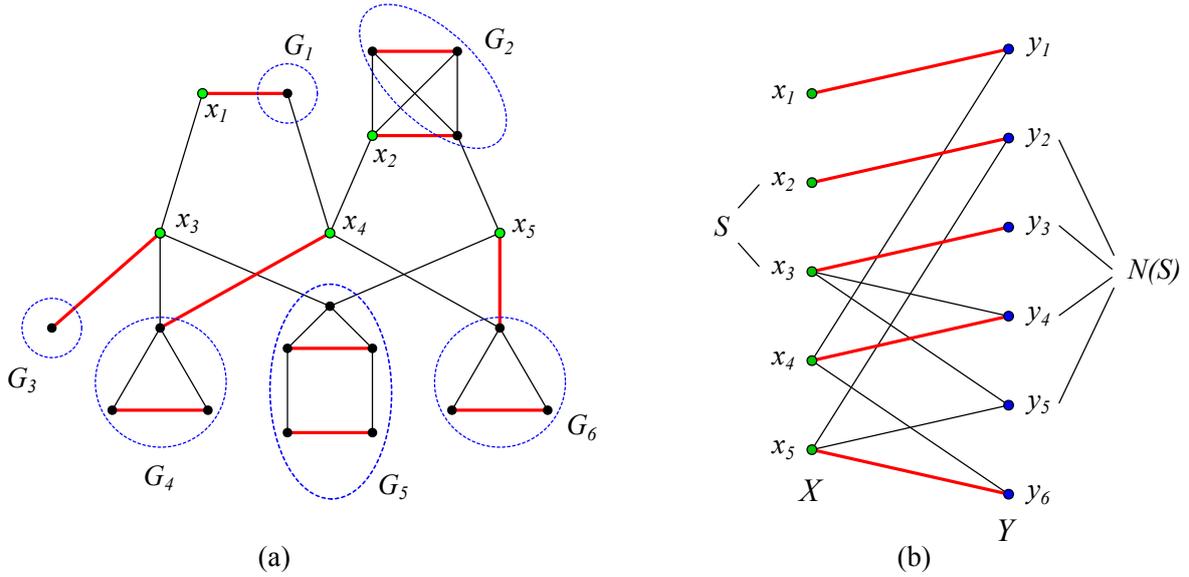


Рис. 73

на рис. 73(a)), мы получим все нечетные компоненты  $G_i$  графа  $G - (T \setminus S)$ ,  $|T \setminus S| = |T| - |S|$  (компоненты  $G_1, G_6$  на рис. 73(a)). Кроме того, оставшиеся вершины графа образуют еще одну связную компоненту. Если она окажется четной, то мы получим равенство

$$|Y \setminus N(S)| - |T \setminus S| = c_{\text{odd}}(G - (T \setminus S)) - |T \setminus S|,$$

а если нечетной — неравенство

$$|Y \setminus N(S)| - |T \setminus S| < c_{\text{odd}}(G - (T \setminus S)) - |T \setminus S|.$$

В обоих случаях мы имеем

$$|Y \setminus N(S)| - |T \setminus S| \leq c_{\text{odd}}(G - (T \setminus S)) - |T \setminus S|.$$

Заметим теперь, что  $T \setminus S$  — произвольное подмножество множества  $V(G)$ , а  $T$  — барьер в графе  $G$ , так что

$$|Y \setminus N(S)| - |T \setminus S| \leq c_{\text{odd}}(G - (T \setminus S)) - |T \setminus S| \leq c_{\text{odd}}(G - T) - |T|,$$

При этом, так как  $c_{\text{odd}}(G - T) = |Y|$ , то из последней цепочки неравенств мы получаем, что

$$(|Y| - |N(S)|) - (|T| - |S|) \leq |Y| - |T|.$$

Как следствие,  $|S| - |N(S)| \leq 0$ , так что условия Холла для двудольного графа  $H(T)$  выполнены.  $\square$

**13.2.4.** Важно отметить, что при доказательстве утверждений 13.5, 13.8 и 13.9 мы нигде не использовали теорему Бержа. Более того, с их помощью можно дать еще одно, довольно простое доказательство этой теоремы. Мы здесь приводить это доказательство не будем, оставив его в качестве упражнения. Вместо этого мы воспользуемся теоремой Бержа и утверждениями 13.5 – 13.9 для описания максимального паросочетания  $M$  и максимального барьера  $T$  в произвольном графе  $G$ .

Именно, пусть  $M$  — произвольное максимальное паросочетание в графе  $G$ , а  $T$  — максимальный барьер в этом графе. Согласно леммам 13.5 и 13.8, в графе  $G - T$  имеется  $c_{\text{odd}}(G - T)$

связных компонент  $G_i$ , каждая из которых является фактор-критическим графом. Кроме того, на основании теоремы Бержа, в графе  $G$  имеется  $c_{\text{odd}}(G - T) - |T|$  вершин, не покрытых паросочетанием  $M$ . Как следствие, в каждой из  $c_{\text{odd}}(G - T)$  компонент графа  $G - T$  ребра паросочетания  $M$  образуют так называемые *почти совершенные паросочетания* — паросочетания, покрывающие все вершины графа  $G_i$  кроме одной. Далее, множество всех компонент  $G_i$  оказывается разбитым на два блока. Компоненты, принадлежащие первому из этих блоков, содержат по вершине, не покрытой паросочетанием  $M$ . Любая компонента второго блока оказывается соединена с какой-то своей вершиной  $x \in T$  ребром, покрытым паросочетанием  $M$ .

(Действительно, если бы у нас в  $G_i$  шло из  $T$  более одного ребра, например, три, то мы могли бы заменить два из этих ребер на одно ребро из  $M$ , лежащее целиком в  $G_i$ , а два освободившихся ребра направить на покрытие вершин в других четных компонентах).

В качестве примера рассмотрим еще раз граф, показанный на рис. 73(а). Вершины, входящие в максимальный барьер  $T$ , помечены на этом рисунке зеленым цветом, а ребра, покрытые максимальным паросочетанием  $M$  — красным цветом. Как видно, в этом графе имеется  $c_{\text{odd}}(G - T) = 1$  вершина, не покрытая паросочетанием  $M$  — вершина, принадлежащая компоненте  $G_5$  графа  $G - T$ . Кроме того, каждая из зеленых вершин соединена ребром, входящим в  $M$ , с некоторой своей компонентой  $G_i$ ,  $i \neq 5$ , графа  $G - T$ . Все оставшиеся ребра паросочетания  $M$  образуют в компонентах  $G_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , почти совершенные паросочетания.

**13.3.** Описанные выше результаты являются подготовкой к доказательству одной из основных теорем теории паросочетаний — структурной теоремой Галлаи – Эдмондса. Данная теорема, доказанная независимо друг от друга Галлаи в 1963 году и Эдмондсом в 1965 году, позволяет описать структуру любого конечного простого графа  $G$  в терминах покрывающего вершины этого графа максимального паросочетания  $M$ .

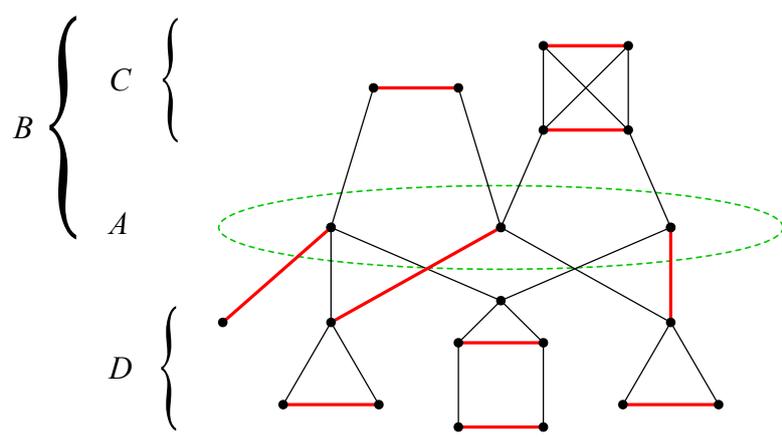


Рис. 74

**13.3.1.** Введем несколько полезных понятий и обозначений. Пусть  $B$  — подмножество вершин графа  $G$ , покрываемых любым максимальным паросочетанием  $M$  в графе  $G$ .

**Определение 13.10.** *Декомпозицией Галлаи – Эдмондса графа  $G$  называется разбиение множества  $V(G)$  его вершин на три блока  $A$ ,  $C$  и  $D$ , такие, что  $D$  есть дополнение  $V(G) \setminus B$  подмножества  $B$  в  $V(G)$ ,  $A$  — подмножество множества  $B$ , состоящее из вершин, имеющих хотя бы одного соседа в  $D$ , а  $C = B \setminus A$  (см. рис. 74).*

**Теорема 13.11** (Структурная теорема Галлаи – Эдмондса). Пусть  $A, C, D$  – подмножества в декомпозиции Галлаи – Эдмондса графа  $G$ , а  $G_1, \dots, G_k$  – связные компоненты подграфа  $G[D]$ , индуцированного подмножеством вершин  $D$ . Для произвольного максимального паросочетания  $M$  имеют место следующие утверждения.

1. Паросочетание  $M$  покрывает все вершины подграфа  $G[C]$ , индуцированного подмножеством  $C$  вершин. Отсюда, в частности, следует, что любая связная компонента подграфа  $G[C]$  представляет собой четный подграф.
2. Каждая вершина  $x$  подмножества  $A$  покрыта ребром паросочетания  $M$ , соединяющим  $x$  со своей собственной компонентой  $G_i$  подграфа  $G[D]$ .
3. Каждая связная компонента  $G_i$  подграфа  $G[D]$  представляет собой фактор-критический граф.
4. Для любого подмножества  $S \neq \emptyset$  множества  $A$  подмножество  $N_G(S)$  его соседей в  $G$  имеет по вершине хотя бы в  $|S| + 1$  из  $k$  компонент  $G_i$ .
5. Подмножество  $A$  представляет собой барьер в графе  $G$ , то есть

$$\text{def}(G) = c_{\text{odd}}(G - A) - |A|,$$

причем количество  $c_{\text{odd}}(G - A)$  нечетных компонент графа  $G - A$  совпадает с числом  $k$  связных компонент подграфа  $G[D]$ .

Доказательство этой теоремы основывается на идеях, изложенных в работе [?]. Возьмем в графе  $G$  барьер  $T$  максимального размера (см. вершины, обведенные зеленой пунктирной линией на рис.75,а). Как мы уже отмечали выше, из любой вершины  $T$  у нас исходит ребро, покрытое  $M$ , в какую-то свою компоненту  $G_i$  графа  $G - T$ . Все остальные ребра  $M$  формируют в компонентах  $G_i$  так называемые почти совершенные паросочетания — паросочетания, покрывающие все вершины  $G_i$ , кроме одной. Наша задача — построить с помощью максимального барьера  $T$  подмножества  $A, C$  и  $D$ , описанные в формулировке теоремы.

Пусть  $H(T)$  есть вспомогательный двудольный граф, построенный по барьеру  $T$  (см.рис.75,б). Так как в нем существует  $T$ -насыщенное паросочетание, то в нем выполняются условия Холла:  $|N(S)| \geq |S|$  для любого  $S \subseteq T$ . Заметим, что в случае  $S = \emptyset$  мощность подмножества  $N(\emptyset)$  равна нулю. Следовательно, существует непустой набор подмножеств, для которых неравенство  $|N(S)| \geq |S|$  выполняется как равенство. Обозначим через  $R$  максимальное из таких подмножеств  $T$  (см.рис.75):

$$R = \max_{S \subseteq T} \{S : |N(S)| = |S|\}.$$

Через  $R'$  мы обоначим подмножество вершин графа  $G$ , отвечающих вершинам  $N(R)$  двудольного графа  $H(T)$  (см. рис.75). В силу условия  $|N(R)| = |R|$  каждое ребро паросочетания  $M$ , исходящее из вершины  $x \in R$ , приходит в некоторую вершину  $y_i$ , принадлежащую своей компоненте связности  $G_i$  подграфа  $G[R']$ . Оставшиеся вершины из  $G_i$  также покрыты ребрами  $M$ . Как следствие, любое максимальное паросочетание  $M$  покрывает все вершины подмножества  $R \cup R'$ .

Обозначим через  $A := T \setminus R$ , а через  $D := V(G) \setminus (T \cup R')$ . Мы уже знаем, что любая вершина  $x \in A$  соединяется ребром, покрытым  $M$ , с какой-то своей компонентой подграфа  $G[D]$ . Покажем теперь, что для любой вершины  $z \in D$  найдется максимальное паросочетание  $M$  в графе  $G$ , не покрывающее  $z$ .

Рассмотрим для этого двудольный подграф  $H'$ , полученный из  $H$  удалением вершин  $R$  и  $N(R)$  (см. двудольный подграф на рис.75,б, построенный на долях  $A$  и  $H(D)$ ). Для любого непустого

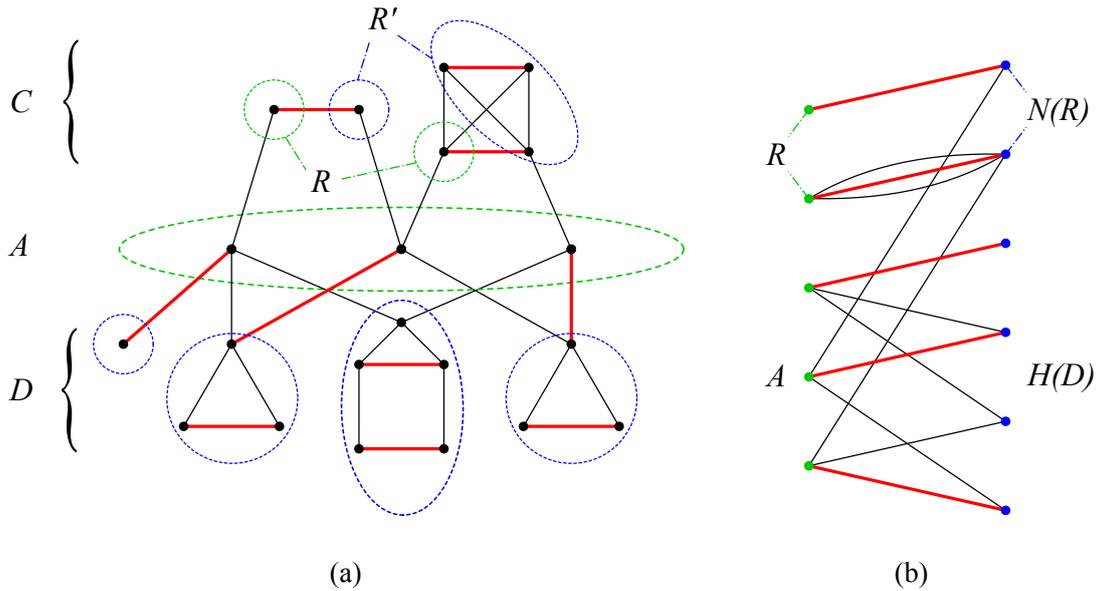


Рис. 75

подмножества  $S \subseteq A$  мы имеем  $N(S) > |S|$  в  $H'$  — в противном случае мы бы могли увеличить  $R$ , добавив к нему вершины  $S$ . Поэтому мы можем удалить произвольную вершину подмножества  $N(A) = H(D)$  в  $H'$ , не нарушив при этом условия Холла. Таким образом, найдется  $A$ -насыщенное паросочетание в  $H'$ , не покрывающее одну из вершин  $H(D)$ . Кроме того, согласно лемме 13.8, каждая из компонент подграфа  $G - T$  представляет собой фактор-критический граф, а значит, каждая вершина  $z \in D$  остается непокрытой каким-то максимальным паросочетанием  $M$ .

Заметим теперь, что никакая вершина из  $C = R \cup R'$  не связана ребром ни с какой другой вершиной из  $D$ . Как следствие,  $C$ ,  $A$  и  $D$  представляют собой нужные нам части декомпозиции Галлаи-Эдмондса, удовлетворяющие пунктам 1-3 теоремы. Кроме того, из условия  $N(S) > |S|$  для любого непустого  $S \subseteq A$  следует и четвертый пункт теоремы Галлаи-Эдмондса.

Наконец, так как  $T$  есть барьер в графе  $G$ , то

$$\text{def}(G) = c_{\text{odd}}(G - T) - |T| = c_{\text{odd}}(G[D]) + c_{\text{odd}}(G[R']) - |R \cup A| = c_{\text{odd}}(G[D]) - |A|.$$

Так как при этом  $c_{\text{odd}}(G - C) = 0$ , то

$$c_{\text{odd}}(G[D]) = c_{\text{odd}}(G - A - C) = c_{\text{odd}}(G - A),$$

так что

$$\text{def}(G) = c_{\text{odd}}(G - A) - |A|,$$

то есть  $A$  также представляет собой барьер в графе  $G$ .  $\square$

**Следствие 13.12.** *Граф  $G$  является фактор-критическим тогда и только тогда, когда  $A = \emptyset$  есть единственный барьер в  $G$ .*

**13.4.** В заключительной части данного параграфа поговорим о возможности построения алгоритма для нахождения максимального паросочетания в произвольном графе  $G$ .

**13.4.1.** В принципе, мы можем попытаться использовать алгоритм Куна для поиска максимального паросочетания и в произвольном графе  $G$ . Однако непосредственное применение этого алгоритма к успеху не приводит, что связано, конечно же, с наличием в графа  $G$  циклов нечетной длины.

Рассмотрим в качестве примера граф  $G$ , показанный на рис.76. В таком графе существует  $M$ -дополняющий путь  $P = (x, u, a, b, c, d, v, y)$ . Если алгоритм поиска в глубину из вершины  $a$  пойдет в вершину  $b$ , то он этот путь найдет. Однако, если алгоритм поиска в глубину, дойдя по пути  $(x, u, a)$  до вершины  $a$ , пройдет затем в вершины  $v$  и  $d$ , то он указанный выше  $M$ -дополняющий путь  $P$  уже не найдет. Иными словами, в случае произвольного графа  $G$  проблема состоит в том, что при попадании в цикл нечетной длины алгоритм поиска в глубину может пойти по циклу в неправильном направлении.

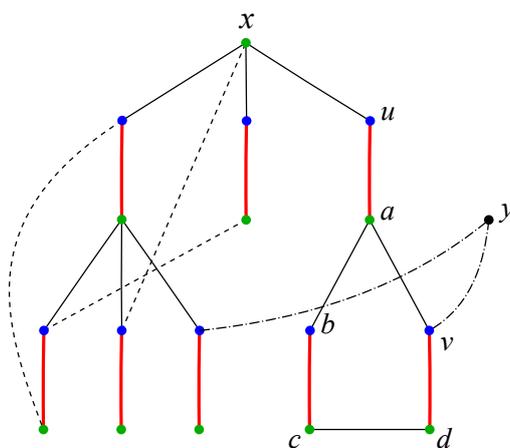


Рис. 76

**13.4.2.** Эдмондс (Edmonds, 1965) предложил алгоритм поиска максимального паросочетания в произвольном графе  $G$  (так называемый blossom algorithm), который позволяет обойти описанные выше сложности.

**Определение 13.13.** Пусть  $x$  есть вершина, не покрытая паросочетанием  $M$ . Предположим, что в графе  $G$  существуют два  $M$ -чередующихся пути из  $x$  в некоторую другую вершину  $v$ , имеющих разную четность (пути  $(x, u, a, v)$  и  $(x, u, a, b, c, d, v)$  на рис.76). Наибольший общий участок этих двух путей, имеющий четную длину (участок  $(x, u, a)$  на рис.76), называется *стеблем* (*stem*). Конечная вершина стебля (вершина  $a$  на рис.??), называется *базой* (*base*). К базе примыкает цикл нечетной длины (цикл  $(a, b, c, d, v, a)$  на рис.??), состоящий из  $2k + 1$  ребра,  $k$  из которых покрыты паросочетанием  $M$ , называемый цветком (*blossom*)  $B$ . База  $a$  представляет собой единственную вершину цикла  $B$ , не покрытую ребрами паросочетания  $M$ .

Идея, лежащая в основе алгоритма Эдмондса, состоит в процедуре, известной под названием *процедуры сжатия цветка* (*blossom shrinking*). На каждом шаге этой процедуры мы заменяем цикл нечетной длины  $B$  (*blossom*) на одну псевдовершину  $B$  (сжимаем цветок). При этом все внешние ребра, исходящие из цикла нечетной длины, становятся инцидентными псевдовершине  $B$ . После сжатия очередного цветка мы пытаемся продолжить данный процесс, стартуя с псевдовершины  $B$ . Если у нас в результате сжатия появился еще один цикл  $C$  нечетной длины, содержащий псевдовершину  $B$ , мы вновь сжимаем его в новую псевдовершину  $C$  и так далее. Как только мы находим в процессе этих действий  $M$ -дополняющий путь, соединяющий  $u$  с вершиной  $y$ , не покрытой  $M$ , мы разворачиваем все сжатые циклы обратно, выбирая в каждом

цикле из двух возможных путей тот, который не нарушит  $M$ -чередующесть восстанавливаемого пути.

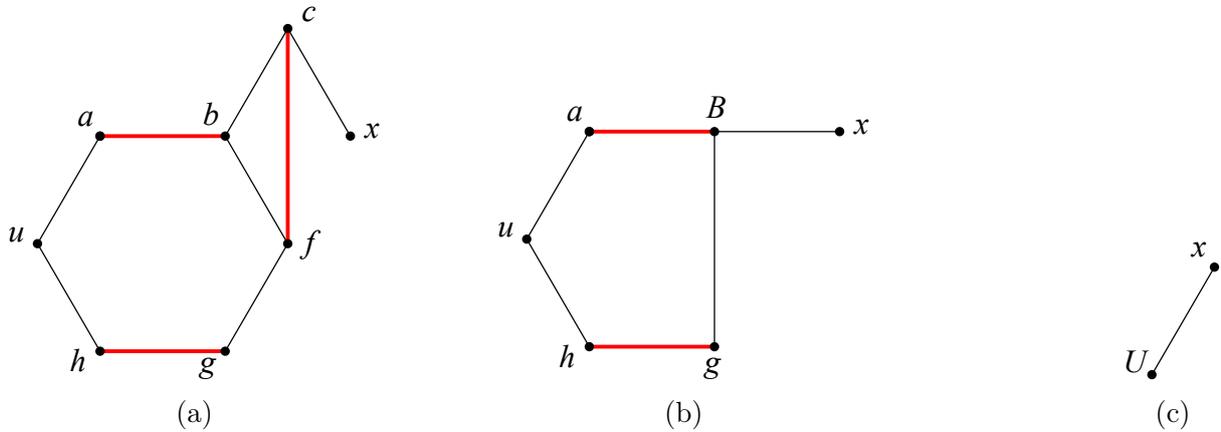


Рис. 77

**13.4.3.** В качестве примера рассмотрим граф  $G$ , показанный на рис.77,а. Красным цветом на этом рисунке помечены ребра, входящие в некоторое паросочетание  $M$ . Вершина  $u$  не покрыта этим паросочетанием. Если мы пройдем из  $u$  вдоль пути  $(u, a, b)$ , мы обнаружим, что этот путь является стеблем цветка, образованного объединением путей  $(u, a, b, f, c)$  и  $(u, a, b, c)$ , а вершина  $b$  является его базой. Сжимая цикл  $(b, c, f)$  нечетной длины в одну псевдовершину  $B$ , мы получим граф  $G'$ , показанный на рис.77,б. В таком графе, в свою очередь, имеется цветок, состоящий из тривиального стебля  $u$ , а также цикла  $(u, a, B, g, h)$  нечетной длины. Сжимая этот цикл в псевдовершину  $U$ , мы получаем граф  $G''$ , изображенный на рис.77,с. В этом графе у нас имеется  $M$ -дополняющий путь  $(U, x)$ . Разворачивая затем цветок, соответствующий псевдовершине  $U$ , и выбирая в образовавшемся цикле сегмент  $(u, a, B, x)$ , мы получаем в графе  $G'$   $M$ -дополняющий путь  $(u, a, B, x)$ . Наконец, разворачивая в  $G'$  псевдовершину  $B$  и выбирая в цикле  $(b, f, c)$  сегмент  $(b, f, c)$ , мы в исходном графе  $G$  обнаруживаем  $M$ -дополняющий путь  $(u, a, b, f, c, x)$ .

**13.4.4.** Заметим в заключение, что подмножества  $A$ ,  $C$  и  $D$ , фигурирующие в формулировке теоремы Галлаи-Эдмондса, можно эффективно находить с помощью алгоритма Эдмондса поиска максимального паросочетания в произвольном графе  $G$ , описанного в предыдущем параграфе. Пусть  $M$  есть максимальное паросочетание в графе  $G$ . Предположим, что  $M$  оставляет непокрытыми вершины подмножества  $X \subseteq V(G)$ . Можно показать, что  $D$  есть подмножество вершин, достижимых из  $X$  с помощью  $M$ -чередующихся путей четной длины (в частности,  $X \subseteq D$ ),  $A$  представляет собой подмножество всех вершин, достижимых из  $X$  с помощью  $M$ -чередующихся путей, за вычетом вершин подмножества  $D$ , а  $C$  есть подмножество вершин, не достижимых из  $X$  с помощью  $M$ -чередующихся путей.

На рис.78,а показан пример графа  $G$  с описанной выше декомпозицией. Ребра максимального паросочетания  $M$  помечены красным цветом на этом рисунке. Зеленым цветом помечены вершины подмножества  $A$ , синим — вершины подмножества  $C$ . Оставшиеся вершины принадлежат подмножеству  $D$ .

Обозначим теперь через  $G'$  граф, полученный из  $G$  с помощью алгоритма сжатия цветков (см.рис.78,б). Оказывается, что такой граф распадается на  $|X|$   $M$ -чередующихся деревьев с корнями в вершинах подмножества  $X$  (вершины  $x$  и  $y$  на рис.78,б). Вершины, достижимые из  $X$  по  $M$ -чередующимся путям нечетной длины, образуют подмножество  $A$  вершин из теоремы

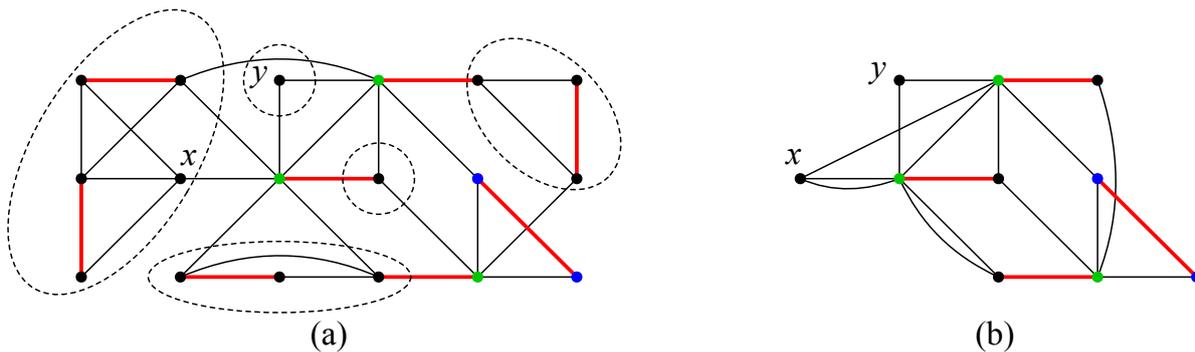


Рис. 78

Галлаи-Эдмондса (вершины, помеченные зеленым цветом на рис.78,b), а вершины, не достижимые из  $X$ , представляют собой подмножество  $C$  (синие вершины на рис.78,b). Заметим, что оба эти подмножества совпадают с соответствующими подмножествами вершин исходного графа  $G$  (см.рис.78,a). Наконец, каждой вершине, достижимой из  $X$  в графе  $G'$  по  $M$ -чередующимся путям четной длины (черные вершины на рис.78,b), отвечает некоторая нечетная компонента связности графа  $G - A$ , представляющая собой фактор-критический подграф графа  $G$  (см. группы вершин, обведенные пунктирными линиями на рис.78,a).

## Раскраска графов

### 14 $k$ -раскрашиваемые графы. Теорема Брукса

**14.1.** Как мы уже неоднократно упоминали выше, любой двудольный граф мы можем рассматривать как двураскрашиваемый граф, то есть граф, вершины которого могут быть правильно окрашены в два цвета. Логично предположить, что наряду с двураскрашиваемыми должны существовать и графы более общего вида, а именно,  $k$ -раскрашиваемые графы. К изучению таких графов мы сейчас и перейдем.

**14.1.1.** Под раскраской вершин графа  $G$  понимается разбиение множества  $V$  его вершин на блоки, называемые цветами. Задать такое разбиение можно, например, с помощью функции  $\varphi : V \rightarrow C$ , отображающей множество  $V$  вершин на некоторое множество  $C = \{1, \dots, k\}$ , называемое множеством цветов.

**Определение 14.1.** Раскраска вершин простого графа  $G$  называется *правильной*, если любые две смежные вершины графа окрашены в разные цвета. Любой граф, который допускает правильную раскраску своих вершин в  $k$  цветов, называется  *$k$ -раскрашиваемым графом*.

**Замечание 14.2.** При анализе  $k$ -раскрашиваемых графов нам достаточно ограничиться простыми графами. Действительно, любая петля соединяет вершину саму с собой. Такую вершину мы одновременно в разные цвета раскрасить, конечно же, не сможем. Как следствие, графы с петлями правильно раскрасить невозможно в принципе, так что мы их сразу можем исключить из рассмотрения. Далее, нас, как правило, будет интересовать вопрос, соединены ли у нас какие-то две вершины ребром или нет. При этом нам совершенно не принципиально, соединены ли эти вершины одним или несколькими ребрами. Так что любое мультиребро мы можем заменить на единственное ребро и рассматривать, таким образом, только лишь простые графы.

**14.1.2.** Рассмотрим граф  $G$ , построенный на  $n$  вершинах. Мы можем взять  $n$  цветов и каждую из вершин графа  $G$  окрасить в свой цвет. При этом мы, конечно же, получим правильную раскраску вершин графа. Однако такой способ окраски вершин нам не очень интересен — на практике нас, как правило, интересует *минимальное* количество цветов, в которые мы можем правильно раскрасить вершины графа  $G$ .

**Определение 14.3.** Наименьшее количество  $k$  цветов, в которое можно правильно покрасить вершины графа  $G$ , называется *хроматическим числом*  $\chi(G)$  этого графа. Сам граф при этом часто называют  *$k$ -хроматическим*.

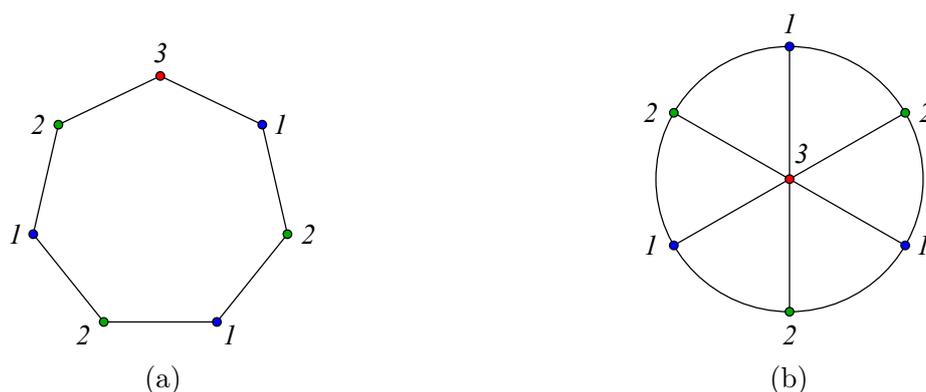


Рис. 79: 3-хроматические графы

**14.1.3.** Понятно, что простой граф  $G$  является 1-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда  $G$  представляет собой пустой граф  $\bar{K}_n$ , и 2-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда он двудольный. Любой простой цикл нечетной длины является простейшим примером 3-хроматического графа (смотри рис.79,а). Еще одним простым примером 3-раскрашиваемого графа является граф “колесо” (рис.79,б).

Как мы уже заметили выше, хроматическое число любого графа, построенного на  $n$  вершинах, ограничено сверху значением  $n$ . Эта верхняя граница достигается, например, на полном графе. Действительно, так как любые две его вершины соединены ребром, то никакие две вершины  $K_n$  нельзя окрасить в один и тот же цвет. Следовательно, хроматическое число полного графа  $\chi(K_n) = n$ .

**14.1.4.** Задачи, связанные с правильной окраской вершин графа  $G$  в как можно меньшее количество цветов, достаточно часто встречаются на практике. Приведем несколько характерных примеров такого рода задач [?, ?].

**Пример 14.4.** Предположим, что студенты в некотором университете учатся по индивидуальным программам и сдают в конце года экзамены по всем предметам, которые они изучали в течение года. Учебный отдел должен так составить расписание экзаменов, чтобы экзамены, на которые должен прийти один и тот же студент, стояли в разные дни. При этом расписание хочется составить так, чтобы количество экзаменационных дней было бы минимальным.

Для формализации данной задачи рассмотрим граф  $G$ , множество вершин которого совпадает с множеством читаемых в университете курсов. Соединим две вершины ребром в случае, если хотя бы один студент слушает оба эти курса. Тогда любая правильная раскраска вершин графа  $G$  даст нам бесконфликтное расписание, а хроматическое число графа  $G$  определит нам минимальное количество экзаменационных дней.

**Пример 14.5.** Химическая компания производит набор  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  химикатов. Некоторые пары этих химикатов взрываются, если приходят в контакт друг с другом. В качестве меры предосторожности компания делит свой склад на отсеки, помещая в каждый отсек лишь те препараты, которые не взрываются при контакте друг с другом. Задача состоит в нахождении минимального количества отсеков для данного набора химических веществ.

Для решения данной задачи построим граф  $G$  на  $n$  вершинах, помеченных элементами множества  $X$ . Соединим любые две вершины графа ребром в случае, если соответствующие этим вершинам химикаты взрываются при контакте друг с другом. Тогда минимальное количество отсеков, на которые следует разделить склад, совпадает с хроматическим числом  $\chi(G)$  графа.

**14.2.** Любую задачу, связанную с раскраской вершин графа, можно разбить на две подзадачи. Первая подзадача состоит в проверке данного графа  $G$  на  $k$ -раскрашиваемость, вторая — в определении хроматического числа  $\chi(G)$  графа  $G$ . Мы знаем, что в случае  $k = 2$  существует достаточно простой критерий двураскрашиваемости графа, на основе которого мы можем построить простой алгоритм проверки графа  $G$  на двудольность. К сожалению, для любого  $k > 2$  никаких простых и удобных критериев проверки графа на  $k$ -раскрашиваемость не существует. Говоря формальным языком, задача проверки графа  $G$  на  $k$ -раскрашиваемость является  $NP$ -полной задачей. Как следствие, более сложная задача определения хроматического числа графа  $NP$ -сложна. В частности, к настоящему времени не известно никакого алгоритма, работающего за полиномиальное время и позволяющего для произвольно взятого графа определить его хроматическое число. В этой связи на практике довольствуются обычно какими-то эвристическими алгоритмами, позволяющими более или менее эффективно определить верхнюю границу хроматического числа  $\chi(G)$ . Опишем наиболее очевидный и популярный из них — так называемый жадный алгоритм окраски вершин графа.

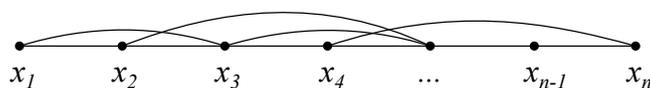


Рис. 80

**14.2.1.** Линейно упорядочим вершины простого связного графа  $G$  (рис.80). Мы знаем, что любой граф на  $n$  вершинах мы можем всегда правильно окрасить цветами из множества  $Y = \{1, \dots, n\}$ . Возьмем это множество цветов и начнем окрашивать вершины графа следующим образом (рис.81):

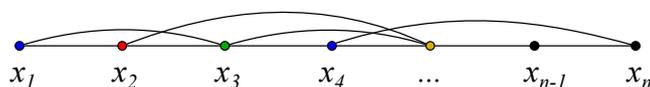


Рис. 81

- окрасим вершину  $x_1$  в цвет 1;
- рассмотрим вторую вершину — вершину  $x_2$ ; если она смежна с вершиной  $x_1$ , то окрасим ее в цвет 2; в противном случае вновь окрасим ее в цвет 1;
- выберем теперь третью вершину  $x_3$ ; если она смежна с вершинами  $x_1$  и  $x_2$ , и если вершины  $x_1$  и  $x_2$  смежны между собой, то  $x_3$  мы сможем окрасить только в новый цвет 3; если она смежна с вершинами  $x_1$  и  $x_2$ , а сами эти вершины не смежны, то мы окрасим ее в цвет 2; если она не смежна ни с одной из вершин  $x_1$  и  $x_2$ , то мы можем ее окрасить в цвет 1; наконец, если она смежна лишь с одной из двух вершин  $x_1$  и  $x_2$ , то мы можем окрасить  $x_3$  в цвет той из вершин  $x_1$  и  $x_2$ , которая с  $x_3$  не смежна;

– опишем теперь общий,  $k$ -й шаг алгоритма: рассмотрим вершину  $x_k$ , а также все смежные с ней вершины с меньшими индексами; эти вершины как-то нами окрашены на предыдущих шагах алгоритма; исключим тогда из множества  $Y$  цветов все те цвета, которые были использованы при окраске смежных с  $x_k$  вершин с меньшими индексами; в оставшемся множестве цветов выберем минимальный цвет и окрасим этим цветом вершину  $x_k$ .

**14.2.2.** Описанный нами жадный алгоритм далеко не всегда работает оптимально и может очень сильно зависеть от способа линейного упорядочивания вершин. Несмотря на это, максимальное количество использованных в данном алгоритме цветов никогда не превысит величины  $\Delta + 1$ , где  $\Delta$  — максимальная из степеней вершин графа  $G$ .

Действительно, в жадном алгоритме для любой вершины  $x_i$  количество уже использованных цветов, в которые нельзя окрасить вершину  $x_i$ , никогда не превысит величины  $\deg(x_i) \leq \Delta$ . Худший случай с точки зрения окраски вершин наступит у нас в том случае, когда мы встретили вершину  $x$  степени  $\Delta$ , и у этой вершины все  $\Delta$  смежных с ней вершин оказались окрашенными на предыдущих шагах нашего алгоритма. Тогда вершину  $x$  мы будем вынуждены окрасить в новый цвет  $\Delta + 1$ . Во всех остальных случаях количество использованных цветов будет меньше величины  $\Delta + 1$ .

Проведенные рассуждения доказывают, в частности, следующий важный результат.

**Теорема 14.6.** *Хроматическое число  $\chi(G)$  графа  $G$  ограничено сверху величиной  $\Delta + 1$ , то есть*

$$\chi(G) \leq \Delta + 1, \quad (33)$$

где  $\Delta$  — наибольшая из степеней вершин графа  $G$ .

**Следствие 14.7.** *Любой  $k$ -хроматический граф обязательно содержит по крайней мере одну вершину, степень которой больше или равна  $k - 1$ .*

**14.3.** Проанализируем верхнюю оценку (33) на хроматическое число  $\chi(G)$  графа  $G$ .

**14.3.1.** Заметим, прежде всего, что эта оценка может быть сколь угодно далека от реального значения хроматического числа  $\chi(G)$  графа. В качестве характерного примера рассмотрим произвольное дерево  $T$ . Так как любое дерево представляет собой двудольный граф, то хроматическое число  $\chi(T)$  дерева  $T$  равно двум. Однако в дереве могут быть вершины, степени которых сколь угодно велики. Как следствие, число  $\Delta + 1$  может быть сколь угодно большим, то есть для таких объектов оценка (33) может быть сколь угодно далека от реальности.

**14.3.2.** В связи со сделанным выше наблюдением естественным образом возникает следующий вопрос — а можем ли мы как-то улучшить данную оценку? Оказывается, однако, что существуют целые классы графов, для которых эта оценка неупрощаема.

Первый такой класс графов — это полные графы  $K_n$ . Мы знаем, что у таких графов  $\Delta = n - 1$ , а окрасить эти графы меньше, чем в  $n$  цветов, невозможно. Следовательно, для полных графов

$$\chi(K_n) = n = \Delta(K_n) + 1.$$

Ко второму классу графов относятся простые циклы  $C_{2n+1}$  нечетной длины (рис.79,а). Для таких циклов  $\Delta = 2$ , а хроматическое число равно трем. Следовательно, и для таких графов верхняя оценка (33) достигается.

Во всех остальных случаях эту оценку можно уменьшить, но только лишь на единицу. Именно, справедлива следующая

**Теорема 14.8** (Brooks, 1941). Пусть  $G$  есть простой связный граф, не являющийся полным графом или же простым нечетным циклом. Тогда

$$\chi(G) \leq \Delta, \quad \text{где} \quad \Delta = \max_{x_i \in V(G)} \deg(x_i).$$



Рис. 82

**14.3.3.** Мы приведем доказательство этой теоремы, данное Ласло Ловасом [?]. Основная идея этого доказательства состоит в следующем: нам нужно придумать такой способ нумерации вершин графа, при котором в результате запуска жадного алгоритма на выходе получается граф, вершины которого оказываются окрашенными не более чем в  $\Delta$  цветов. Заметим сразу же, что при произвольной нумерации вершин жадный алгоритм может окрасить вершины графа более, чем в  $\Delta$  цветов. В качестве примера рассмотрим двудольный граф, показанный на рис.82,а. Максимальная степень  $\Delta$  его вершин равна двум. Если же мы пронумеруем вершины графа так, как это указано на рис.82,б, то мы получим окраску вершин этого графа в три цвета.

**14.3.4.** Легче всего подобную нумерацию вершин придумать в графе  $G$ , не являющимся  $k$ -регулярным. Действительно, возьмем в графе  $G$  произвольную вершину, степень которой строго меньше  $\Delta$ , и присвоим ей номер  $n$  (см.рис.83). Так как граф  $G$  связный, то мы, например, поиском в ширину, можем построить остовное дерево  $T$  с корнем в вершине  $n$  (ребра, помеченные синим цветом на рис.83), назначая вершинам этого дерева номера  $i$ , убывающие по мере удаления этих вершин от корня дерева.

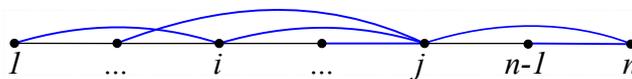


Рис. 83

В этом случае любая вершина  $i$ , отличная от  $n$ , обязательно будет иметь по крайней мере одну смежную с ней в остовном дереве  $T$  вершину, номер  $j$  который строго больше  $i$ . Как следствие, при подходе жадного алгоритма к вершине  $i \neq n$  хотя бы одна смежная с  $i$  вершина, а именно, вершина  $j$ , обязательно останется неокрашенной. Оставшиеся же смежные с  $i$  вершины будут окрашены не более чем в  $\deg(i) - 1 \leq \Delta - 1$  цветов. Поэтому жадный алгоритм всегда сможет назначить вершине  $i \neq n$  один из цветов  $1, 2, \dots, \Delta$ .

Наконец, так как степень вершины  $n < \Delta$ , то мы всегда сможем на последнем шаге жадного алгоритма назначить этой вершине хотя бы один неиспользованный цвет из списка  $1, 2, \dots, \Delta$ .

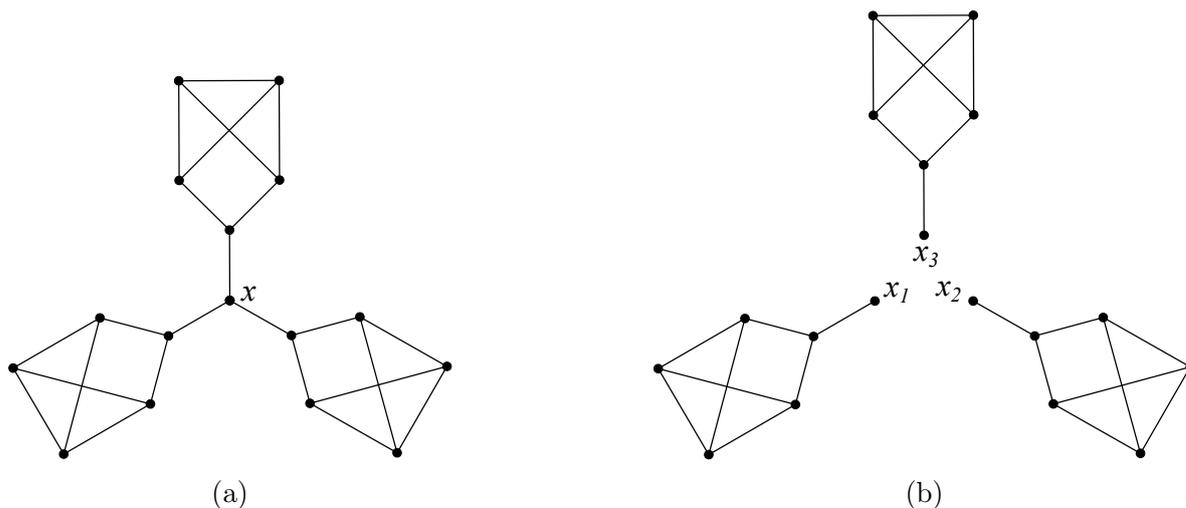


Рис. 84

**14.3.5.** Рассмотрим теперь  $\Delta$ -регулярный односвязный граф, имеющий хотя бы одну точку сочленения  $x$  (рис.84,а). Обозначим через  $H_i$  подграфы графа  $G$ , полученные в результате удаления вершины  $x$ . Расцелим вершину  $x$  на  $\Delta$  вершин  $x_i$  и рассмотрим графы  $G_i$ , индуцированные подмножествами вершин  $\{x_i\} \cup V(H_i)$  (рис.84,б). В каждом таком графе  $G_i$ , рассматриваемом отдельно от остальных, степень вершины  $x_i$  равна единице. Так как у нас  $\Delta > 1$ , то любой такой граф  $G_i$  можно правильно окрасить в не более чем  $\Delta$  цветов, используя алгоритм, описанный в предыдущем пункте для нерегулярных графов. Покажем теперь, что данную окраску всегда можно продолжить на весь граф  $G$ , окрасив правильно все вершины  $G$  не более чем в  $\Delta$  цветов.

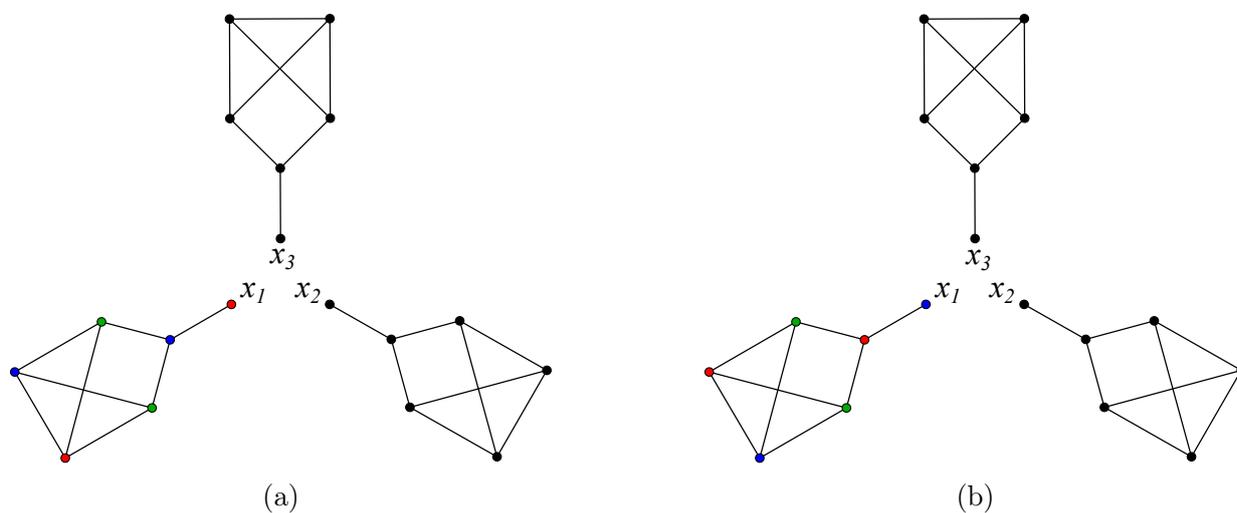


Рис. 85

Предположим, что в результате работы жадного алгоритма вершина  $x_i$  в графе  $G_i$  окрасилась в цвет  $k$  (красный цвет на рис.85,а). Рассмотрим все вершины данного графа, окрашенные в цвет  $k$ , а также все вершины этого блока, окрашенные в цвет 1 (синий цвет на рис.85,а). Поменяем цвета этих вершин на противоположные (рис.85,б). Правильность окраски при этом, очевидно, не нарушится. В результате такой замены вершина  $x_i$  окажется окрашенной в цвет 1. Повторяя эту процедуру для каждого из графов  $G_i$ , мы, как говорят, согласуем окраску вершин  $x_i$  — для любого  $i$  вершины  $x_i$  окажутся окрашенными в один и тот же цвет 1. Склеивая теперь обратно

$\Delta$  вершин  $x_i$  в одну вершину  $x$ , мы получим правильную окраску исходного графа  $G$  не более чем в  $\Delta$  цветов.

**14.3.6.** Осталось рассмотреть случай простого связного  $\Delta$ -регулярного графа  $G$  без точек сочленения, то есть  $\Delta$ -регулярного двусвязного графа. Мы можем считать, что  $\Delta \geq 3$ , так как случаи  $\Delta = 0$  и  $\Delta = 1$  отвечают элементарным полным графам  $K_1$  и  $K_2$  соответственно, а случай  $\Delta = 2$  соответствует либо нечетному циклу, который мы также, как и полный граф, исключили из рассмотрения, либо четному циклу, для которого теорема верна.

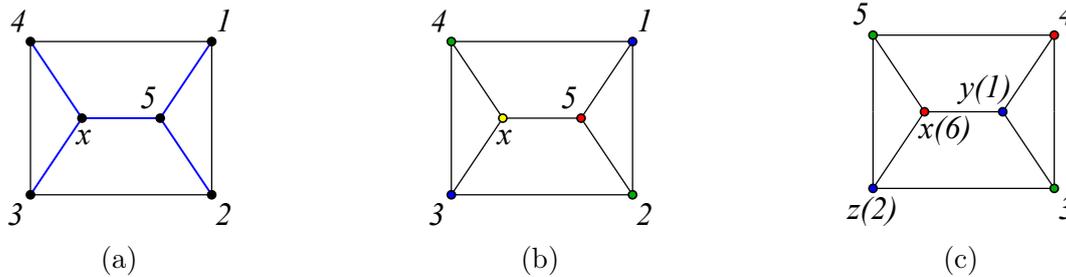


Рис. 86

Выбирая в рассматриваемом графе  $G$  в качестве корня остовного дерева произвольную вершину  $x$  (рис.86,а), присваивая ей номер  $n$  и размечая оставшиеся  $(n - 1)$  вершин с помощью поиска в ширину, мы получим некоторое линейно упорядоченное множество вершин графа  $G$ . Как и в случае нерегулярного графа, запуская жадный алгоритм на такой разметке вершин, мы гарантируем, что для окраски произвольной вершины  $i \neq n$  нам всегда хватает  $\Delta$  цветов. При окраске же последней вершины, то есть вершины с номером  $n$ , у нас могут возникнуть проблемы (см.рис.86,б). Действительно, у такой вершины все  $\Delta$  смежных с ней вершин уже оказываются окрашенными на предыдущих шагах жадного алгоритма. Если при этом все  $\Delta$  смежных с  $n$  вершин окажутся к этому моменту окрашенными в разные цвета, то жадный алгоритм окрасит вершину с номером  $n$  в цвет  $\Delta + 1$ . Иными словами, нам нужно подправить алгоритм разметки вершин так, чтобы подобная ситуация никогда не возникла.

Оказывается, сделать это достаточно просто. Ниже мы покажем, что в любом двусвязном  $k$ -регулярном графе обязательно найдется вершина  $x$ , имеющая пару соседних несмежных между собой вершин  $y$  и  $z$ , таких, что граф  $G - y - z$  остается связным (см. рис.86,с). Назначим такой вершине  $x$  номер  $n$ , а вершинам  $y$  и  $z$  — номера 1 и 2. Удаляя вершины  $y$  и  $z$ , мы получаем связный граф, вершины которого можно разметить с помощью поиска в ширину, стартуя из вершины  $x = n$  и назначая вершинам метки  $i$  с номерами, убывающими по мере удаления этих вершин от корня дерева. Добавляя затем обратно вершины  $y$  и  $z$ , мы получаем граф  $G$ , в котором любая вершина, отличная от  $x$ , по-прежнему имеет как максимум  $\Delta - 1$  смежных с ней вершин, имеющих меньшие номера.

Запустив тогда жадный алгоритм для вершин, упорядоченных в порядке  $(1, 2, \dots, n)$ , мы окрасим вершины графа в не более чем  $\Delta$  цветов. Действительно, вершины 1 и 2 алгоритм окрасит в цвет 1 (синий цвет на рис.86,с). Так как любая вершина  $i, i = 3, \dots, (n - 1)$ , обязательно имеет по крайней мере одну смежную вершину  $j$  с номером, большим, чем  $i$ , на своем пути к корню  $n$  остовного дерева, то жадному алгоритму хватит для ее окраски цветов из множества  $\{1, \dots, \Delta\}$ . Наконец, среди  $\Delta$  смежных с  $n$  вершин найдутся как минимум две вершины, окрашенные в один и тот же цвет, а именно, вершины 1 и 2. Поэтому для правильной окраски  $n$  также окажется достаточно цветов из множества  $\{1, 2, \dots, \Delta\}$ .

**14.3.7.** Итак, для полного доказательства теоремы Брукса осталось убедиться в том, что описанная в предыдущем пункте тройка вершин  $x, y, z$  в двусвязном  $\Delta$ -регулярном графе с  $\Delta \geq 3$  всегда существует. Легче всего сделать это в случае, когда граф трехсвязен. Так как  $G$  отличен от полного графа, то в нем найдется пара несмежных между собой вершин  $y, z$ , смежных с некоторой общей для них вершиной  $x$ . Так как граф трехсвязный, то удаление  $y$  и  $z$  оставляет граф связным, так что в этом случае искомая тройка вершин существует.

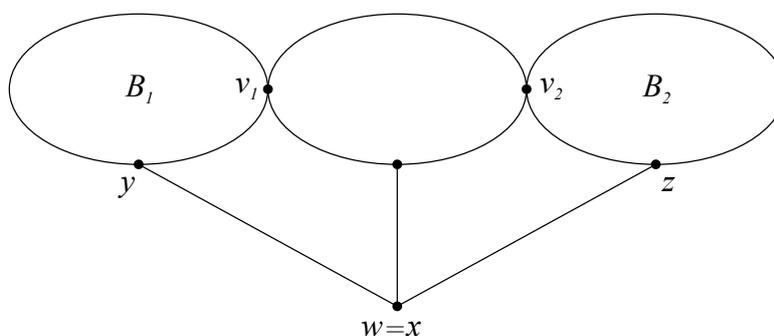


Рис. 87

Теперь предположим, что  $\kappa(G) = 2$ . Выберем в  $G$  вершинно разделяющее множество  $S$ ,  $|S| = 2$ , и рассмотрим вершину  $x \in S$ . Так как  $\kappa(G - x) = 1$ , то граф  $G - x$  можно разбить на блоки  $B_j$  и точки сочленения  $v_j$  (смотри рис.87). Рассмотрим произвольную пару блоков  $B_1$  и  $B_2$ , отвечающих листьям дерева блоков и точек сочленения графа  $G - x$ . Обозначим через  $v_1$  и  $v_2$  принадлежащие этим двум блокам точки сочленения. Так как исходный граф  $G$  двусвязный, то существует вершина  $y \in (B_1 - v_1)$ , смежная с  $x$  в графе  $G - v_1$ , а также вершина  $z \in (B_2 - v_2)$ , смежная с  $x$  в графе  $G - v_2$ . По построению, вершины  $y$  и  $z$  несмежны. Кроме того, степень  $\Delta$  в графе больше или равна 3, так что вершина  $x$ , помимо  $y$  и  $z$ , имеет хотя бы одного соседа в  $G - y - z$ . Как следствие, граф  $G - y - z$  остается связным, а значит, вершины  $x, y, z$ , образуют искомую тройку вершин в графе  $G$ . Теорема Брукса доказана.

**14.4.** В следующих параграфах нам встретится важный подкласс графов — так называемые  $k$ -критические графы.

**Определение 14.9.** Граф  $G$  называется  $k$ -критическим, если  $\chi(G) = k$  и хроматическое число  $\chi(H)$  любого его собственного подграфа строго меньше  $k$ .

Изучим простейшие свойства таких графов.

**14.4.1.** Заметим, что любой граф с  $\chi(G) = k$  имеет  $k$ -критический подграф  $H$ . Действительно, удаляя ребра и/или вершины графа  $G$ , мы в конечном итоге приходим к ситуации, при которой удаление любой вершины и/или ребра уменьшает количество цветов, необходимых для правильной раскраски полученного подграфа.

**14.4.2.** Следующее утверждение дает нам оценку сверху на степени вершин  $k$ -критического графа.

**Утверждение 14.10.** Минимальная степень  $\delta(G)$   $k$ -критического графа  $G$  больше или равна  $k - 1$ .

**Доказательство.** Предположим, что это не так, то есть предположим, что в графе  $G$  нашлась вершина  $x \in V(G)$ , такая, что  $\deg(x) < k - 1$ . Рассмотрим подмножество  $N(x)$  смежных с  $x$

вершин графа  $G$ . Так как граф  $G$  является  $k$ -критическим, то граф  $G - x$  можно правильно окрасить в  $k - 1$  цвет. При этом, так как  $|N(x)| < k - 1$ , какой-то из этих цветов в подмножестве  $N(x)$  будет отсутствовать. Окрасив вершину  $x$  в этот цвет, мы получим правильную окраску исходного графа  $G$  в  $k - 1$  цвет, что противоречит исходному предположению  $\chi(G) = k$ .  $\square$

**14.4.3.** Достаточно очевидно, что любой  $k$ -критический граф  $G$  связан — в противном случае мы бы могли удалить одну из связных компонент, не поменяв хроматического числа  $\chi(G)$  всего графа. Оказывается, что в  $k$ -критическом графе точки сочленения отсутствуют, то есть он является вершинно двусвязным графом.

**Утверждение 14.11.** *В  $k$ -критическом графе точки сочленения отсутствуют.*

**Доказательство.** Действительно, предположим, что в  $k$ -критическом графе  $G$  нашлась точка сочленения  $x$ . Но тогда рассуждения, аналогичные проведенным при доказательстве теоремы Брукса, позволят нам правильно окрасить  $G$  в  $k - 1$  цвет. Именно, удаляя вершину  $x$ , мы получаем  $s$  несвязных компонент  $H_i$  графа  $G - x$ . Рассмотрим вместо  $H_i$  аналогичное количество экземпляров подграфов  $G_i$ , индуцированных подмножествами вершин  $V(H_i) + \{x\}$ . Каждый из них мы можем окрасить в  $k - 1$  цвет. При этом мы в каждом таком подграфе можем поменять цвета так, чтобы вершина  $x$  оказалась окрашенной, например, в цвет 1. Но тогда и исходный граф можно окрасить в  $k - 1$  цвет, чего быть не может.  $\square$

Оказывается, доказанное утверждение достаточно легко обобщается на случай произвольного вершинно разделяющего множества  $S \subset V(G)$ .

**Определение 14.12.** Пусть  $S$  есть вершинно разделяющее множество в графе  $G$ , и пусть  $H_1, \dots, H_t$  есть компоненты связности графа  $G - S$ . Подграфы  $G_i$ , индуцированные подмножествами вершин  $S \cup V(H_i)$ , называются  $S$ -компонентами графа  $G$ .

**Определение 14.13.** Правильная раскраска  $S$ -компонент называется *согласованной*, если любая вершина  $x \in S$  окрашена в один и тот же цвет в правильной раскраске каждой из  $S$ -компонент графа  $G$ .

**Утверждение 14.14.** *В любом  $k$ -критическом графе  $G$  отсутствует вершинно разделяющее множество  $S$ , являющееся кликой.*

**Доказательство** практически дословно повторяет доказательство утверждения 14.11. Именно, предположим, что в  $k$ -критическом графе  $G$  нашлось вершинно разделяющее множество  $S$ , являющееся кликой. Рассмотрим  $S$ -компоненты  $G_i$  графа  $G$ . Так как исходный граф  $G$  является  $k$ -критическим, то любой из  $G_i$  можно правильно раскрасить в  $k - 1$  цвет. Так как  $S$  является кликой, то каждая из ее вершин обязана быть окрашена в свой цвет. Переставляя цвета этих вершин, мы всегда сможем согласовать раскраску вершин множества  $S$  в этих компонентах. Но это означает, что объединение  $G_i$ , представляющее собой исходный граф  $G$ , окрашено в  $k - 1$  цвет, что невозможно.  $\square$

**Следствие 14.15.** *Если в  $k$ -критическом графе имеется вершинно разделяющее множество, состоящее из двух вершин, то эти вершины обязаны быть несмежными между собой.*

**Замечание 14.16.** Из приведенного выше доказательства также следует, что хотя бы в одной из  $S$ -компонент графа  $G$  должна отсутствовать правильная раскраска в  $k - 1$  цвет, при которой все вершины  $S$  окрашены в разные цвета.

**14.4.4.** Рассмотрим поподробнее важный частный случай  $k$ -критического графа, а именно, графа, в котором имеется вершинно разделяющее множество  $S = \{x, y\}$ .

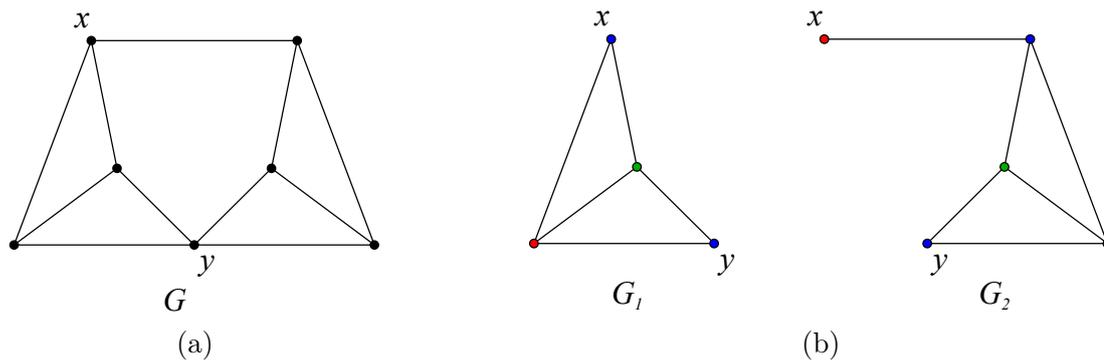


Рис. 88: Граф Хайоша

**Пример 14.17.** На рис. 88 показан характерный пример такого графа — так называемый граф Хайоша (Hajos graph). В упражнении ?? предлагается доказать, что такой граф является 4-хроматическим графом. Несложно проверить, что этот граф является 4-критическим графом — удаление любого ребра и/или любой вершины позволяет раскрасить получившийся граф в три цвета. Кроме того, в таком графе имеется вершинно разделяющее множество  $S$ , состоящее из вершин  $x$  и  $y$  (рис.88,а).

На рис.88,б показаны две  $S$ -компоненты этого графа — графы  $G_1$  и  $G_2$ . Заметим, что при любой минимальной правильной раскраске вершин графа  $G_1$  вершины  $x$  и  $y$  обязаны быть окрашены в один и тот же цвет. Напротив, в графе  $G_2$  эти вершины должны быть окрашены в разные цвета.

Оказывается, описанная в примере ситуация имеет место и в общем случае.

**Теорема 14.18 (Dirac).** Пусть  $G$  есть  $k$ -критический граф, в котором существует вершинно разделяющее множество  $S = \{x, y\}$ . Тогда  $G$  представляет собой объединение ровно двух своих  $S$ -компонент  $G_1$  и  $G_2$ , у одной из которых при любой правильной окраске в  $k-1$  цвет вершины  $x$  и  $y$  окрашены в один и тот же цвет, а у второй — в разные цвета.

**Доказательство.** Действительно, рассмотрим произвольный  $k$ -критический граф  $G$ , в котором существует вершинно разделяющее множество  $S = \{x, y\}$ , состоящее из несмежных друг с другом вершин  $x$  и  $y$ . Как мы заметили выше, если бы мы сумели построить согласованную раскраску всех  $S$ -компонент, то граф  $G$  у нас оказался бы раскрашиваемым в  $k-1$  цвет. Так как это невозможно, то у нас существует хотя бы одна  $S$ -компонента  $G_1$ , у которой вершины  $x$  и  $y$  окрашены в один и тот же цвет, и хотя бы одна  $S$ -компонента  $G_2$ , у которой вершины  $x$  и  $y$  окрашены в разные цвета. Так как при выполнении этих условий граф  $G_1 \cup G_2$  в  $k-1$  цвет правильно окрасить уже невозможно, а граф  $G$  —  $k$ -критический, то никакой другой  $S$ -компоненты существовать уже не может и  $G = G_1 \cup G_2$ .  $\square$

**14.5.** В заключение данного параграфа поговорим о важном обобщении понятия  $k$ -раскрашиваемого графа —  $L$ -раскрашиваемых (или списочно раскрашиваемых) графах.

**14.5.1.** В некоторых практически важных задачах возможны дополнительные ограничения на цвета, которые можно приписать той или иной вершине.

**Пример 14.19.** Вернемся к задаче о химическом складе. В этой задаче мы любому веществу приписывали некоторый цвет из диапазона от 1 до  $k$ , а затем вещества одного и того же цвета

помещали в один и тот же отсек склада. Однако на практике для некоторых веществ могут потребоваться хранилища специального типа. Например, для радиоактивных веществ это должны быть хранилища со свинцовыми стенами, а для веществ, взрывающихся при комнатной температуре — хранилища, в которых поддерживается низкая температура. С точки зрения теории графов это означает, что мы должны каждой вершине приписывать не просто число от 1 до  $k$ , а некоторое подмножество этих чисел, свое для каждой вершины.

Перейдем к формальным определениям. Рассмотрим функцию  $L: V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ , сопоставляющую любой вершине  $x \in V(G)$  некоторое подмножество натуральных чисел  $L(x)$ .

**Определение 14.20.** Правильная раскраска вершин графа  $G$ , при которой любая вершина  $x \in V(G)$  графа  $G$  оказывается окрашенной в один из цветов, принадлежащих подмножеству  $L(x)$ , называется *списочной раскраской* или  *$L$ -раскраской* графа  $G$ . Граф, допускающий такую раскраску, называется  *$L$ -раскрашиваемым* (или *списочно раскрашиваемым*) графом.

Заметим, что  $k$ -раскрашиваемый граф есть частный случай  $L$ -раскрашиваемого графа. Действительно, выбирая в качестве  $L$  множество  $[k]$  первых  $k$  натуральных чисел, мы сведем задачу о  $L$ -раскраске графа к задаче о правильной окраске графа в  $k$  цветов.

**14.5.2.** Рассмотрим частный случай сформулированной выше задачи о  $L$ -раскраске графа, при котором для любой вершины  $x \in V(G)$  список  $L(x)$  цветов имеет размер, равный  $k$ .

**Определение 14.21.** Граф  $G$  называется *списочно  $k$ -раскрашиваемым*, если у него существует правильная  $L$ -раскраска для любых наборов множеств  $L(x)$ ,  $x \in V(G)$ , размер которых равен  $k$ . Наименьшее значение  $k$ , при котором граф  $G$  является списочно  $k$ -раскрашиваемым, называется *списочным хроматическим числом*  $\chi_L(G)$  графа  $G$ .

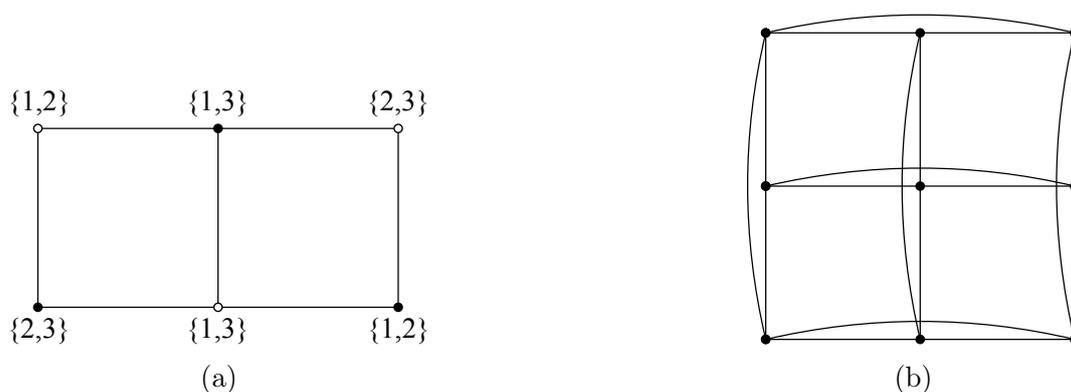


Рис. 89

Так как обычная раскраска является частным случаем списочной раскраски, то  $\chi(G) \leq \chi_L(G)$  для любого графа  $G$ . Равенство же этих чисел в общем случае места не имеет. В качестве примера можно рассмотреть двудольный граф, показанный на рис.89,а и представляющий собой сетку размерами  $3 \times 2$ . Несложно убедиться (см. упражнение ??), что для случая подмножеств  $L(x)$ , указанных на рисунке, правильная списочная раскраска такого графа отсутствует. Можно доказать, однако, что для этого графа  $\chi_L(G) = 3$  (упражнение ??).

В [?] подробно разбирается задача о списочной раскраске графа  $S_n$ , представляющего собой сетку из  $n^2$  вершин, соединенных между собой в случае, если они находятся в одной и той же

строке или в одном и том же столбце этой сетки (см. рис.89,b, на котором представлен граф  $S_3$ ). В случае  $L = [n]$  мы получаем так называемую задачу о латинских квадратах. Очевидно, что в этом случае мы всегда можем правильно окрасить граф  $S_n$  в  $n$  цветов. Относительно недавно было доказано, что и списочное хроматическое число  $\chi_L(S_n)$  такого графа также равняется  $n$  (см. [?]).

В общем случае верхнюю оценку на  $\chi_L(S_n)$  получили Визинг в 1976 году и, независимо, Эрдёш, Рубин и Тейлор в 1979 году.

**Теорема 14.22.** *Списочное хроматическое число любого графа  $G$ , для которого справедливо неравенство  $\chi(G) \leq \Delta(G)$ , также ограничено сверху  $\Delta(G)$ .*

## 15 Нижние оценки на хроматическое число. Теорема Турана. Совершенные графы

**15.1.** Помимо верхних оценок, для хроматического числа  $\chi(G)$  можно пытаться строить и какие-то нижние оценки.

**15.1.1.** Одна из наиболее очевидных нижних оценок связана с понятием кликового числа  $\omega(G)$  графа  $G$ , под которым понимается количество вершин в наибольшей клике графа  $G$ . Очевидным является следующее утверждение.

**Утверждение 15.1.** *Хроматическое число  $\chi(G)$  любого графа  $G$  не может быть меньше его кликового числа:*

$$\chi(G) \geq \omega(G). \quad (34)$$

Отсюда, в частности, следует простой способ построения графа  $G$  с большим хроматическим числом — поместить в граф  $G$  клику большого размера. Оказывается, однако, что граф с большим хроматическим числом вовсе не обязан иметь одновременно и большое кликовое число.

**15.1.2.** Рассмотрим, к примеру, так называемые графы без треугольников, то есть графы, не содержащие простых циклов длины три. Заметим, что любой полный граф  $K_n$ , построенный на  $n \geq 3$  вершинах, содержит в качестве своих подграфов клики  $K_k$  любых размеров  $k \in [1, \dots, n - 1]$ , и, в частности, обязательно содержит треугольники  $K_3$ . Следовательно, графы без треугольников — это графы с кликовым числом  $\omega(G) \leq 2$ , то есть графы, которые в качестве своих подграфов не содержат никаких клик помимо ребер  $K_2$  и вершин  $K_1$ .

**Теорема 15.2** (Mycielski, 1955). *Для любого натурального числа  $k$  существует  $k$ -хроматический граф без треугольников.*

**Доказательство** данной теоремы основано на следующей конструкции, позволяющей получить из произвольного простого графа  $G_k$  некоторый простой граф  $G_{k+1}$ , содержащий  $G_k$  в качестве своего подграфа:

- добавляем к множеству  $V(G_k) = \{x_1, \dots, x_n\}$  вершин графа  $G_k$  вершины  $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ , а также еще одну вершину  $z$ ;
- для любого  $i = 1, \dots, n$  соединяем ребрами вершину  $y_i$  со всеми вершинами исходного графа  $G_k$ , смежными с  $x_i$ ;

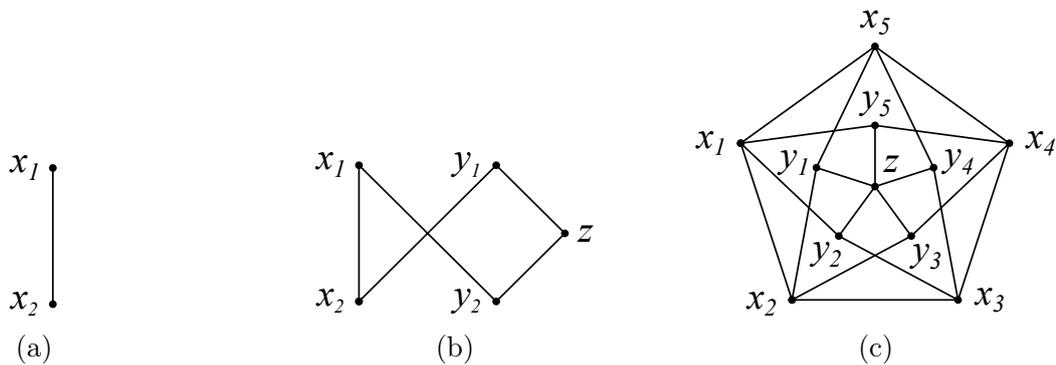


Рис. 90: Графы без треугольников

– соединяем вершину  $z$  со всеми вершинами множества  $Y$ .

**Пример 15.3.** Рассмотрим в качестве примера 2-хроматический граф  $G_2 = K_2$  (рис.90,а). Первая итерация описанной выше конструкции позволяет получить из него 3-хроматический граф  $G_3 = C_5$  (рис.90,б). Следующая итерация, примененная к графу  $C_5$ , дает нам так называемый граф Грётцша  $G_4$  (рис.90,с).

**15.1.3.** Покажем по индукции, что граф Грётцша  $G_4$ , а также любые графы  $G_{k+1}$ , полученные в результате применения данной процедуры к графам  $G_k$ , являются  $(k + 1)$ -хроматическими графами без треугольников.

Заметим прежде всего, что граф  $G_{k+1}$  не содержит никаких треугольников. Действительно, так как все вершины множества  $Y$  несмежны друг с другом, то любой потенциальный треугольник в графе  $G'$  может содержать лишь одну вершину из множества  $Y$ . Как следствие, вершину  $z$  такой треугольник содержать уже не может. Поэтому единственный возможный вариант такого треугольника — это простой цикл вида  $x_i y_j x_k x_i$ . Однако и это невозможно — в противном случае в исходном графе  $G_k$  существовал бы треугольник  $x_i x_j x_k x_i$ , чего быть не может по индукционному предположению.

Теперь покажем, что граф  $G_{k+1}$  является  $(k + 1)$ -раскрашиваемым. Для этого рассмотрим произвольную правильную окраску графа  $G_k$  в  $k$  цветов и продолжим ее на граф  $G_{k+1}$  следующим образом: окрасим вершины  $y_i$  графа  $G_{k+1}$  в те же цвета, что и вершины  $x_i$ , а вершину  $z$  окрасим в цвет  $(k + 1)$ . В результате получим правильную окраску графа  $G_{k+1}$ .

Осталось доказать, что граф  $G_{k+1}$  не является  $k$ -раскрашиваемым. Предположим, что граф  $G_{k+1}$  все же можно правильно окрасить в  $k$  цветов. Без потери общности мы можем считать, что вершина  $z$  окрашена в цвет  $k$ . При таком способе окраски никакая вершина множества  $Y$  не может быть окрашена в этот же цвет  $k$ , то есть все вершины  $y_j$  окрашены в цвета из подмножества  $\{1, \dots, k - 1\}$ . Вершины же  $x_i$  могут быть, в принципе, окрашены в правильной окраске графа  $G_{k+1}$  в цвета  $1, \dots, k$ . Обозначим через  $S$  подмножество вершин  $x_i$ , окрашенных в цвет  $k$ . Возьмем тогда каждую из вершин  $x_i$ , окрашенную в цвет  $k$ , и перекрасим ее в цвет, в который окрашена соответствующая ей вершина  $y_i$ . Так как множество смежных с  $x_i$  вершин совпадает для любого  $i$  с множеством вершин, смежных с  $y_i$ , то такой способ окраски графа  $G_k$  окажется правильным (при этом может испортиться правильная окраска графа  $G_{k+1}$ , однако для нас сейчас это не важно). Однако этот способ окраски требует лишь  $(k - 1)$  цветов графа  $G_k$ , что противоречит индукционному предположению.  $\square$

**15.1.4.** Итак, мы установили, что отсутствие в графе  $G$  треугольников (а следовательно, и клик

большого размера) еще не гарантирует того, что хроматическое число  $\chi(G)$  будет маленьким. Посмотрим еще раз на контрпримеры, построенные Мицельским. В каждом из графов  $G_k$  треугольники (то есть клики, изоморфные  $K_3$ ) отсутствуют. Заметим, однако, что в этих графах довольно много индуцированных подграфов, изоморфных циклам  $C_l$ ,  $l \geq 4$ . Иными словами, обхват графа  $G_k$  мал. В связи с этим может показаться, что большое значение  $\chi(G_k)$  вызвано наличием в них достаточно большого количества циклов не слишком большой длины. Однако и это предположение оказывается неверным. Именно, справедлива

**Теорема 15.4** (Erdos, 1961). *Для любого натурального  $k$  существует  $k$ -хроматический граф, обхват которого (то есть длина наименьшего простого цикла в нем) больше или равен  $k$ .*

Эрдёш доказал эту теорему с помощью вероятностных методов. Его доказательство было неконструктивным: он лишь показал, что подобные графы существуют. Несколько лет спустя появились работы, в которых были предложены и конструктивные алгоритмы построения подобного рода графов.

**15.1.5.** Давайте теперь поймем, в чем же заключается проблема с графами, в которых отсутствуют треугольники, и в которых обхват графа велик. Локально (в небольшой окрестности заданной вершины  $x$ ) такие графы очень похожи на деревья. Мы знаем, что хроматическое число дерева равно двум. Поэтому и для графов с большим обхватом можно было бы ожидать, что хроматическое число графа окажется небольшим. Однако, как показали Мицельский и Эрдёш, это предположение неверно — хроматическое число таких графов может быть сколь угодно велико. Иными словами, такая характеристика графа, как его хроматическое число, является глобальной характеристикой графа  $G$ , и давать какие-то оценки для  $\chi(G)$ , исходя только из локальных характеристик графа, практически невозможно.

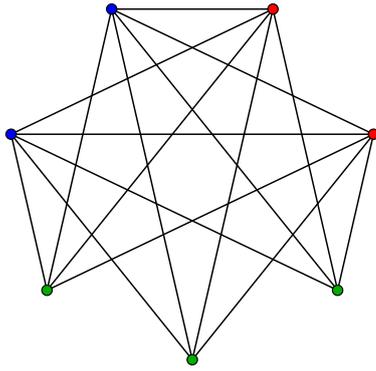
**15.2.** Вернемся к нижней оценке  $\chi(G) \geq \omega(G)$  на хроматическое число. Эта оценка показывает, в частности, что графы с большим кликовым числом  $\omega(G)$  гарантированно имеют большое хроматическое число. В этой связи встает вопрос о том, при каких значениях параметров, характеризующих граф  $G$ , в графе гарантированно существует клика заданного размера  $k$ .

**15.2.1.** Зафиксируем количество  $n$  вершин в графе  $G$  и будем следить за числом  $m$  ребер в нем. Мы знаем, что при  $m = n - 1$  связный граф  $G$  представляет собой дерево. Кроме того, в упражнениях к первой главе мы доказали так называемую теорему Мантеля о том, что в графе, содержащем более, чем  $n^2/4$  ребер, обязательно существуют треугольники, то есть подграфы, изоморфные  $K_3$ . В 1941 году венгерский математик Туран обобщил этот результат, определив количество ребер, при котором в графе гарантированно существует клика заданного размера. Считается, что с этого результата берет свое начало новый раздел комбинаторики и теории графов — так называемая экстремальная теория графов.

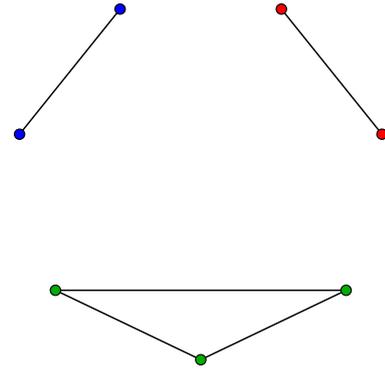
**15.2.2.** Прежде чем формулировать теорему Турана, напомним, что  $n^2/4$  есть также верхняя граница для количества ребер в двудольном графе, построенном на  $n$  вершинах, причем эта граница достигается на некотором полном двудольном графе  $K_{n,m}$  (см. упражнения к главе 1). Рассмотрим теперь более общее понятие полного  $k$ -дольного графа  $K_{n_1, \dots, n_k}$ .

**Определение 15.5.** Граф  $G$  называется полным  $k$ -дольным графом  $K_{n_1, \dots, n_k}$ ,  $k > 1$ , в случае, если множество  $V(G)$  его вершин может быть разбито на  $k$  блоков  $V_1, \dots, V_k$ , таких, что  $x$  смежна с  $y$  тогда и только тогда, когда  $x$  и  $y$  относятся к различным блокам этого разбиения.

Заметим, прежде всего, что любой такой граф является  $k$ -хроматическим графом: каждый блок  $V_i$  разбиения окрашен в свой цвет в некоторой правильной раскраске графа  $K_{n_1, \dots, n_k}$  в



(а) Полный 3-дольный граф  $K_{2,2,3}$



(б) Граф  $\bar{K}_{2,2,3}$

Рис. 91

$k$  цветов. На рис.91,а в качестве примера показан полный 3-дольный граф  $K_{2,2,3}$ . Кроме того, несложно убедиться в том, что дополнение к полному  $k$ -дольному графу представляет собой граф  $\bar{G}$ , состоящий из  $k$  связных компонент, каждая из которых является полным графом (см.рис.91,б).

**15.2.3.** Любой граф  $K_{n_1, \dots, n_k}$  содержит ровно  $m = \sum_{i \neq j} n_i n_j$  ребер. Интуитивно ясно (см. упражнение ??), что количество  $m$  ребер станет максимальным в случае, если мы приблизим числа  $n_i$  друг к другу так близко, насколько это возможно. Для этого нам следует потребовать, чтобы в случае  $n = t \cdot k + r$ ,  $0 \leq r < k$ , ровно  $r$  из  $k$  блоков,  $r = r(n, k) = \{n/k\}$ , содержали  $t + 1$  вершину, а оставшиеся  $k - r$  блоков —  $t$  вершин. Такой граф часто называют *графом Турана*  $T(n, k)$ . Подсчитаем количество  $M(n, k)$  ребер в таком графе. В полном графе на  $n$  вершинах имеется  $\binom{n}{2}$  ребер. Мы знаем, что

$$\binom{n}{2} = |E(G)| + |E(\bar{G})| = M(n, k) + r \binom{t+1}{2} + (k-r) \binom{t}{2}.$$

Отсюда после несложных арифметических преобразований мы получаем, что

$$M(n, k) = \frac{k-1}{2k} \cdot n^2 - \frac{r(k-r)}{2k}. \quad (35)$$

Теорема Турана утверждает, что это число представляет собой верхнюю границу на количество ребер в любом графе, построенном на  $n$  вершинах и не содержащем клики размера  $k + 1$ .

**Теорема 15.6** (Turán, 1941). Пусть количество ребер в простом графе  $G$ , построенном на  $n = t \cdot k + r$  вершинах, больше числа  $M(n, k)$ . Тогда  $G$  содержит клику размера  $k + 1$ .

**Доказательство.** Рассмотрим множество графов, построенных на  $n = k \cdot t + r$  вершинах и не содержащих клики размера  $k + 1$ . Пусть граф  $G$  есть граф, имеющий максимальное количество  $m$  ребер среди всех графов этого множества. Покажем, что  $G$  может содержать как максимум  $M(n, k)$  ребер.

Будем действовать индукцией по числу  $t = \lfloor n/k \rfloor$ . Случаю  $t = 0$ , то есть случаю  $k > n$ , отвечает граф  $G$ , количество  $n$  вершин в котором равно  $r < k$ . Графом с максимальным количеством ребер, не содержащим клику размера  $k + 1$ , является в этом случае полный граф  $G = K_r$  на  $r$  вершинах. При этом количество ребер в графе Турана  $T(n, k)$  в рассматриваемом случае равно

$$M(n, k) = M(r, k) = \frac{k-1}{2k} r^2 - \frac{r(k-r)}{2k} = \binom{r}{2},$$

то есть совпадает с количеством ребер в полном графе  $K_r$ . Понятно, что для такого графа требуемое утверждение выполняется тривиальным образом. Поэтому предположим, что это утверждение выполнено при  $t - 1$ ,  $t > 0$ , и покажем, что оно остается верным и для числа  $t$ .

По построению графа  $G$ , добавление любого ребра  $e$  к этому графу вызывает появление в графе  $G + e$  клики размера  $k + 1$ . Следовательно, сам граф  $G$  обязан содержать клику  $S$  размера  $k$ . Оценим количество ребер в графе  $G$ . В самой клике имеется  $\binom{k}{2}$  ребер. Так как в графе  $G$  клика размера  $k + 1$  отсутствует, то из любой вершины подграфа  $G - S$  в клику  $S$  может исходить как максимум  $k - 1$  ребро. Наконец, подграф  $G - S$  содержит  $n - k = (t - 1)k + r$  вершин. Следовательно, количество ребер в нем по индукционному предположению не может быть больше  $M(n - k, k)$ . Собирая все эти факты вместе, мы получаем, что число  $m$  ребер в графе  $G$  не превосходит величины

$$\binom{k}{2} + (n - k) \cdot (k - 1) + M(n - k, k) = M(n, k).$$

Действительно, согласно формуле (35),

$$M(n - k, k) = \frac{k - 1}{2k}(n - k)^2 - \frac{r(k - r)}{2k},$$

поэтому

$$M(n - k, k) + (n - k) \cdot (k - 1) = \frac{(k - 1)(n^2 - k^2)}{2k} - \frac{r(k - r)}{2k} = M(n, k) - \binom{k}{2}.$$

□

**Следствие 15.7.** Пусть количество ребер в простом графе  $G$ , построенном на  $n = t \cdot k + r$  вершинах, больше числа  $M(n, k)$ . Тогда  $G$  невозможно правильно раскрасить в  $k$  цветов.

**15.3.** Как мы установили ранее, большое хроматическое число еще не означает, что в графе существуют клики больших размеров. Однако имеется целый класс чрезвычайно важных на практике графов, для которых числа  $\omega(G)$  и  $\chi(G)$  совпадают:

$$\omega(G) = \chi(G) = k.$$

Конечно же, можно построить любое количество таких графов, рассматривая граф, одной из компонент связности которого является  $k$ -хроматический граф, а другой — полный граф  $K_k$ , у которого  $\omega(K_k) = k$ . Понятно, что такая конструкция никак нам не поможет сказать что-то конструктивное о структуре  $k$ -хроматического графа. Чтобы исключить подобного рода вырожденные конструкции, вводят понятие так называемого совершенного графа.

**Определение 15.8.** Граф  $G$  называется *совершенным*, если как для самого графа  $G$ , так и для любого его индуцированного подграфа  $G[A]$ ,  $A \subseteq V(G)$ , то есть подграфа, полученного из  $G$  удалением одной или нескольких вершин, хроматическое и кликовое числа совпадают:

$$\chi(G[A]) = \omega(G[A]) \quad \forall A \subseteq V(G).$$

Изучим несколько поподробнее такого рода графы.

**15.3.1.** Тривиальным примером совершенных графов являются полные графы: так как любой индуцированный подграф полного графа вновь представляет собой полный граф, и так как

для любого полного графа  $K_n$  на  $n$  вершинах числа  $\omega(K_n) = \chi(K_n) = n$ , то  $K_n$  является совершенным графом для любого  $n > 0$ .

Несложно понять, что любой двудольный граф также является совершенным графом. Действительно, любой двудольный граф  $G$ , а также любой его индуцированный подграф  $G[A]$  обладают свойством  $\omega(G[A]) = \chi(G[A])$ . Следовательно,  $G$  является совершенным графом по определению такого графа.

**15.3.2.** Впервые термин совершенный граф ввел в своих работах французский математик Клод Берж (Claude Berge). В этих работах он исследовал несколько важных подклассов графов, у которых  $\omega(G) = \chi(G)$ , и высказал две крайне важные гипотезы о том, как все такие графы устроены.

Прежде всего, Берж заметил, что для всех известных ему подклассов совершенных графов дополнения  $\bar{G}$  к графам  $G$  из этих подклассов также являются совершенными графами. В частности, дополнение  $\bar{G}$  к любому двудольному графу  $G$  также является совершенным графом (упражнение ??). В 1961 году он выдвинул гипотезу, которая в дальнейшем получила название слабой гипотезы Бержа или теоремы о совершенных графах, утверждающую, что любой совершенный граф обладает этим свойством.

**Теорема 15.9** (Слабая гипотеза Бержа или теорема о совершенных графах). *Граф совершенен тогда и только тогда, когда его дополнение  $\bar{G}$  также является совершенным графом.*

Данная гипотеза получила очень красивое доказательство, данное в 1972 году венгерским математиком Ласло Ловацом. На этот момент ему было всего лишь 22 года. В конце этого параграфа мы приведем это доказательство слабой гипотезы Бержа.

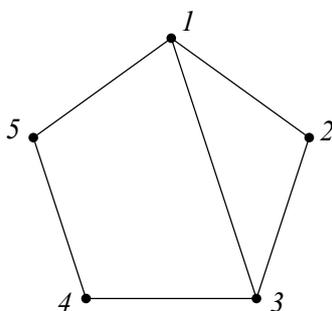


Рис. 92

**15.3.3.** В том же 1961 году Берж выдвинул и еще одну гипотезу об устройстве совершенных графов, которая получила название сильной гипотезы Бержа. Для ее формулировки нам понадобится ввести несколько дополнительных понятий.

**Определение 15.10.** *Хордой* цикла  $C$  длины, большей трех, в графе  $G$  называется ребро  $e = \{x, y\}$ , не принадлежащее циклу  $C$ , концевые вершины  $x, y$  которого лежат на цикле.

В качестве примера на рис.92 показано ребро  $e = \{1, 3\}$ , представляющее собой хорду цикла  $C_5$ , построенного на пяти вершинах.

**Определение 15.11.** Индуцированным циклом в графе  $G$  называется цикл  $C$  длины, большей трех, не имеющий хорд, то есть цикл длины, большей трех, являющийся индуцированным подграфом исходного графа  $G$ .

**Теорема 15.12** (Сильная гипотеза Бержа). *Граф совершенен тогда и только тогда, когда ни  $G$ , ни его дополнение  $\bar{G}$  не содержат индуцированных циклов нечетной длины.*

**Замечание 15.13.** Обратим внимание на то, что формулировка сильной гипотезы Бержа не запрещает совершенным графам иметь нечетные циклы длины три.

Ясно, что слабая гипотеза Бержа сразу же следует из сильной гипотезы. Действительно, сильная гипотеза утверждает, что граф  $G$  является совершенным тогда и только тогда, когда как сам этот граф, так и его дополнение  $\bar{G}$  обладают некоторым свойством (не содержать индуцированных циклов нечетной длины). Отсюда сразу же следует, что  $G$  и  $\bar{G}$  могут либо одновременно являться совершенными графами, либо одновременно таковыми не являться. Случай, когда  $G$  является совершенным, а  $\bar{G}$  нет, сильной гипотезой Бержа исключается.

Доказательство сильной гипотезы Бержа было анонсировано Чудновски, Робертсоном, Сеймуром и Томасом (Chudnowski, Robertson, Seymour, and Thomas) лишь в 2002 году. Публикация же этого результата появилась только в 2006 году.

**15.4.** Поговорим немного поподробнее о слабой гипотезе Бержа (теореме о совершенных графах).

**15.4.1.** Напомним, что любая клика в произвольном (не обязательно совершенном) простом графе  $G$  есть вершинно независимое множество в дополнении  $\bar{G}$  к графу  $G$  и наоборот. В качестве примера на рис.93,а показан совершенный граф  $G$ , хроматическое число которого равно трем. Клика максимального размера  $\omega(G) = 3$  в этом графе помечена синим цветом на рис.93,б. На рис.93,с показано дополнение  $\bar{G}$  графа  $G$ . Синим цветом на этом рисунке помечены вершины, образующие вершинно независимое множество в графе  $\bar{G}$ .

Как следствие,  $\omega(G) = \alpha(\bar{G})$  и  $\omega(\bar{G}) = \alpha(G)$ .

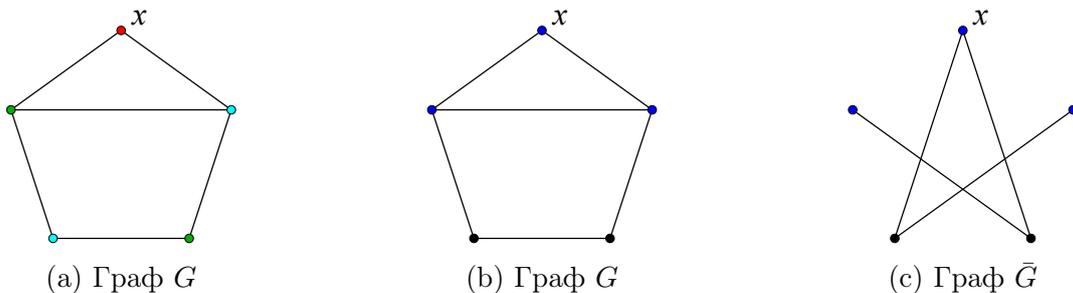


Рис. 93

**15.4.2.** Введем теперь важное понятие *кликового покрытия* (clique cover) графа  $G$ .

**Определение 15.14.** *Кликовым покрытием* (или вершинным кликовым покрытием) графа  $G$  называется такое разбиение множества  $V(G)$  вершин этого графа на блоки, при котором подмножество вершин, принадлежащее каждому блоку, индуцирует в исходном графе  $G$  клику соответствующего размера.

Ясно, что все множество вершин представляет собой тривиальное разбиение  $V(G)$  на блоки единичной длины — любая вершина представляет собой индуцированный подграф, изоморфный графу  $K_1$ . Нас, как обычно, будет интересовать такое кликовое покрытие, при котором

количество блоков минимально. Количество блоков в таком минимальном кликовом покрытии обозначается через  $\vartheta(G)$ .

В качестве примера рассмотрим граф  $G$ , показанный на рис.93,б. Множество вершин этого графа мы можем разбить на два блока (синие и черные вершины на рисунке) так, чтобы вершины каждого блока индуцировали клику в исходном графе  $G$ . Так, три синие вершины графа индуцируют подграф, изоморфный  $K_3$ , а две черные — клику размера 2. На один блок множество вершин разбить невозможно — все пять вершин графа клику, изоморфную  $K_5$ , не образуют. Следовательно, для этого графа  $\vartheta(G) = 2$ .

**Замечание 15.15.** В некоторых источниках (см., например, [?]) кликовым покрытием графа  $G$  называется покрытие множества вершин подмножествами, каждое из которых индуцирует клику в исходном графе  $G$ . При таком определении подмножества, образующие это покрытие, могут пересекаться друг с другом. Однако число  $\vartheta(G)$  для этих двух определений совпадает — любое минимальное покрытие вершин графа кликами приводится к разбиению  $V(G)$  на блоки, индуцирующие клики в графе  $G$ , и наоборот.

**15.4.3.** Рассмотрим наряду с графом  $G$  его дополнение — граф  $\bar{G}$ . Как мы уже неоднократно замечали, любой клике графа  $G$  в графе  $\bar{G}$  отвечает некоторое вершинно независимое множество (смотри рис.93,с), а числу  $\omega(G)$  — величина  $\alpha(\bar{G})$ . Давайте теперь поймем, какой величине в графе  $\bar{G}$  отвечает число  $\chi(G)$  графа  $G$ .

Выбрав некоторое кликовое покрытие графа  $G$  и окрасив вершины каждого из блоков этого покрытия в свой цвет, мы получим правильную окраску графа  $\bar{G}$  (93,с). В случае, если количество покрывающих граф  $G$  клик минимально, минимальным будет и количество цветов, необходимых для окраски вершин графа  $\bar{G}$ . Следовательно, для произвольного простого графа  $G$  мы имеем равенство

$$\chi(\bar{G}) = \vartheta(G).$$

Аналогично,

$$\chi(G) = \vartheta(\bar{G}).$$

**15.4.4.** Рассмотрим теперь совершенный граф  $G$ . Для любого его подграфа  $G[A]$ , индуцированного подмножеством вершин  $A \subseteq V(G)$ , из равенства

$$\chi(G[A]) = \omega(G[A]), \quad A \subseteq V(G),$$

следует равенство

$$\vartheta(\bar{G}[A]) = \alpha(\bar{G}[A]), \quad A \subseteq V(G),$$

для его дополнения. Обратно, если граф  $\bar{G}$  совершенен, то из равенства

$$\chi(\bar{G}[A]) = \omega(\bar{G}[A]), \quad A \subseteq V(G),$$

мы получаем равенство

$$\vartheta(G[A]) = \alpha(G[A]), \quad A \subseteq V(G).$$

Берж графы с  $\vartheta(G[A]) = \alpha(G[A])$  предложил называть  $\alpha$ -совершенными графами, а графы с  $\chi(G[A]) = \omega(G[A])$  —  $\gamma$ -совершенными графами. Слабая гипотеза Бержа, таким образом, утверждает, что понятия  $\alpha$ -совершенных и  $\gamma$ -совершенных графов совпадают, то есть что из равенства  $\vartheta(G[A]) = \alpha(G[A])$  следует равенство  $\chi(G[A]) = \omega(G[A])$  и наоборот.

**15.4.5.** Отметим в заключение минимаксный характер описанных выше соотношений. Мы знаем, что в общем случае  $\omega(G) \leq \chi(G)$ , то есть для задач поиска минимального хроматического числа и максимальной клики в графе у нас имеется условие слабой оптимальности. Совершенные графы — это графы, в которых выполняются условия сильной оптимальности. Как обычно, это означает, что для таких графов существуют эффективные алгоритмы поиска как  $\omega(G)$ , так и  $\chi(G)$ .

Теперь обратимся к числам  $\alpha(G)$  и  $\vartheta(G)$ . Несложно понять, что в общем случае произвольного простого графа  $G$  у нас также имеет место условие слабой оптимальности

$$\alpha(G) \leq \vartheta(G). \quad (36)$$

Действительно, любая клика  $K$  в графе  $G$  может покрывать как максимум одну вершину вершинно независимого множества  $S$ .

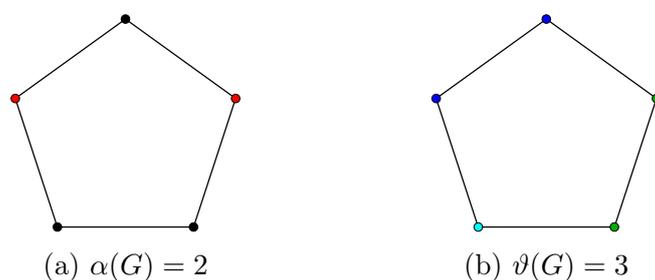


Рис. 94

Заметим, что в общем случае неравенство (36) может быть строгим.

**Пример 15.16.** Рассмотрим граф  $G$ , представляющий собой простой цикл длины 5 (рис.94). Число  $\alpha(G)$  для такого графа равно двум — взяв в  $G$  произвольную пару несмежных между собой вершин (красные вершины на рис.94,а) и добавив к ней любую из оставшихся вершин, мы нарушим свойство попарной несмежности вершин из этого множества. Число же  $\vartheta(G)$  для этого графа равно трем (рис.94,б). Действительно, любая клика в таком графе изоморфна либо  $K_2$ , либо  $K_1$ . Как следствие, любое минимальное кликовое покрытие состоит из двух блоков мощности два и одного блока, содержащего единственную вершину (см.рис.94,б). Таким образом, для рассматриваемого графа  $\vartheta(G) = 3 > 2 = \alpha(G)$ .

В случае совершенного графа неравенство (36) превращается в равенство. Иными словами, в случае совершенного графа вместо условия слабой оптимальности мы имеем условие сильной оптимальности.

Гипотеза Бержа при этом говорит нам о том, что рассмотренные выше минимаксные задачи являются двойственными друг другу — если в задаче о минимальной окраске вершин неравенство (34) обращается в равенство для любого индуцированного подграфа графа  $G$ , то и в задаче о максимальном вершинно независимом множестве неравенство (36) обращается в равенство для любого  $G[A]$ ,  $A \subseteq V(G)$ , и наоборот. С этой точки зрения слабая гипотеза Бержа и ее переформулировки идейно близки к многочисленным парам минимаксных теорем комбинаторики и теории графов, таким, например, как теорема Дилуорса и двойственная ей теорема Мирского.

**15.5.** Приступим теперь к доказательству слабой гипотезы Бержа.

**15.5.1.** Для доказательства этой гипотезы нам понадобится операция *расширения* (expanding) вершины  $x$  графа  $G$  на ребро  $\{x, x'\}$ .



Рис. 95

**Определение 15.17.** Пусть  $x$  есть произвольная вершина графа  $G$  (см.рис.95,а). Операция расширения этой вершины состоит в добавлении к множеству  $V(G)$  вершин графа  $G$  новой вершины  $x'$  и соединении ее с  $x$ , а также со всеми вершинами  $y$ , смежными с  $x$  (рис.95,б).

**Лемма 15.18.** Граф  $G'$ , полученный из совершенного графа  $G$  расширением произвольной вершины  $x \in V(G)$ , также является совершенным.

**Доказательство** проведем индукцией по количеству  $n$  вершин совершенного графа. База индукции верна — взяв совершенный граф  $K_1$  и расширив единственную его вершину  $x$ , мы получим граф  $K_2$ , который также является совершенным. Пусть теперь  $G$  есть произвольный совершенный граф, построенный на  $n > 1$  вершинах, а граф  $G'$  получен из графа  $G$  расширением произвольной вершины  $x \in V(G)$  на ребро  $\{x, x'\}$ .

Рассмотрим вначале произвольный собственный (то есть отличный от  $G'$ ) индуцированный подграф  $G'[A']$  графа  $G'$ ,  $A' \subset V(G')$ . Тот факт, что  $\omega(G'[A']) = \chi(G'[A'])$ , легко следует из индукционного предположения. Действительно, в случае, если хотя бы одна из пары вершин  $x, x'$  не принадлежит  $A'$ , граф  $G'[A']$  представляет собой индуцированный подграф графа  $G$ . В противном случае  $G'[A']$  можно рассматривать как подграф, полученный из некоторого собственного подграфа  $G[A]$  графа  $G$  расширением вершины  $x$ . В обоих случаях, согласно индукционному предположению, такой подграф совершенен, поэтому для доказательства леммы нам остается только доказать равенство

$$\chi(G') = \omega(G')$$

для самого графа  $G'$ . Так как для любого графа  $G'$  выполняется неравенство  $\chi(G') \geq \omega(G')$ , то для доказательства требуемого равенства нам достаточно убедиться в справедливости обратного неравенства  $\chi(G') \leq \omega(G')$ .

Предположим вначале, что вершина  $x$  принадлежит некоторой максимальной клике  $K$  графа  $G$  (рис.95,б). Расширение такой вершины увеличивает на единицу кликовое число графа:

$$\omega(G') = \omega(G) + 1.$$

При этом мы всегда можем окрасить вершину  $x'$  в какой-то новый,  $(\chi(G) + 1)$ -й цвет, и получить какую-то правильную окраску графа  $G'$  (см.рис.95,б). Но так как  $\chi(G')$  есть минимальное количество способов правильно окрасить граф  $G'$ , то мы с учетом равенства  $\chi(G) = \omega(G)$  можем записать

$$\chi(G') \leq \chi(G) + 1 = \omega(G) + 1 = \omega(G').$$

Из этой цепочки равенств следует, что граф  $G'$  — совершенный. Нам, таким образом, остается разобраться со случаем, когда  $x$  максимальной клике не принадлежит, то есть со случаем, при котором  $\omega(G') = \omega(G)$  (рис.96,а).

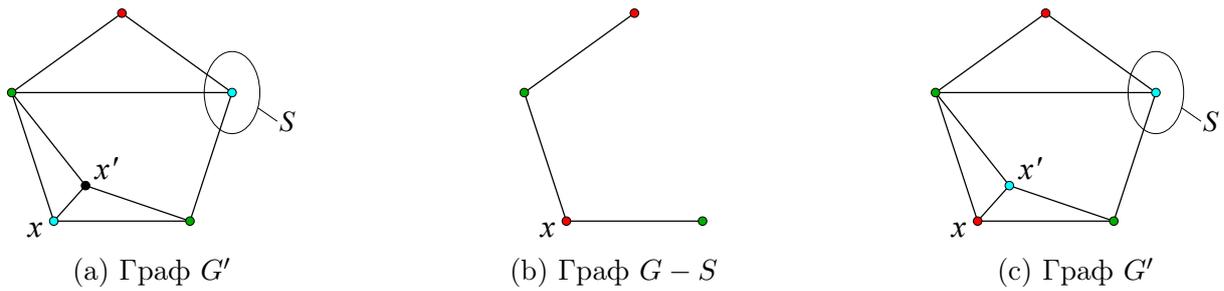


Рис. 96

Окрасим вершины графа  $G$  в  $\chi(G) = \omega(G)$  цветов. Пусть  $i$  — цвет, который получила вершина  $x$  при этой окраске (голубой цвет на рис.96,а). Обозначим через  $S$  подмножество вершин графа  $G$ , окрашенных в цвет  $i$  и отличных от вершины  $x$ .

Заметим, прежде всего, что подмножество  $S \cup \{x'\}$  в графе  $G'$  образует вершинно независимое множество. Действительно, вершины из  $S$  несмежны между собой потому, что они окрашены в  $G$  в один и тот же цвет, а сама окраска вершин графа  $G$  правильная. По той же причине все смежные с  $x$  вершины не входят в подмножество  $S$ . Но тогда и  $x'$  как вершина, полученная расширением вершины  $x$ , оказывается несмежной ни с одной из вершин подмножества  $S$ .

Кроме того, заметим, что при окраске вершин *совершенного* графа  $G$  в  $\chi(G) = \omega(G)$  цветов любая клика максимального размера  $\omega(G)$  также окажется окрашенной ровно в  $\omega(G)$  цветов. Как следствие, ровно одна вершина каждой клики максимального размера будет окрашена в цвет  $i$ , то есть войдет в подмножество  $S$ .

Удалим теперь из графа  $G'$  подмножество вершин  $S \cup \{x'\}$ . В результате мы получим некоторый индуцированный подграф  $G - S$  графа  $G$ . Согласно предыдущему замечанию, кликовое число  $\omega(G - S)$  графа  $G - S$  оказывается по меньшей мере на единицу меньше кликового числа  $\omega(G)$  графа  $G$ :

$$\omega(G - S) < \omega(G) \quad \iff \quad \omega(G - S) + 1 \leq \omega(G).$$

Граф  $G - S$  как индуцированный подграф графа  $G$  совершенен, поэтому мы можем окрасить его в  $\chi(G - S) = \omega(G - S)$  цветов (рис.96,б). Добавим теперь к графу  $G - S$  удаленные ранее вершины подмножества  $S \cup \{x'\}$  и окрасим эти вершины в цвет  $\chi(G - S) + 1$  (рис.96,с). Так как, согласно сделанному ранее замечанию, подмножество  $S \cup \{x'\}$  в графе  $G'$  является вершинно независимым, то полученная окраска графа  $G'$  окажется правильной. Но тогда для хроматического числа графа  $G'$  мы с учетом  $\omega(G - S) = \chi(G - S)$  можем записать цепочку неравенств

$$\chi(G') \leq \chi(G - S) + 1 = \omega(G - S) + 1 \leq \omega(G) = \omega(G'),$$

из которой следует, что и в этом случае  $\chi(G') = \omega(G')$ . □