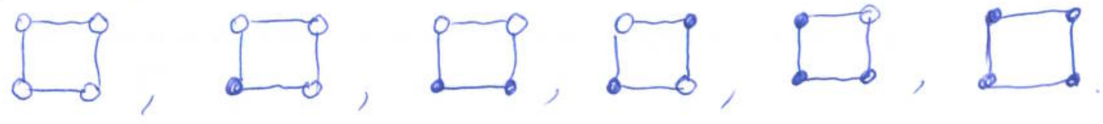
③ Теория Пойа: веса, энумераторы (перечни), производящие функции.

1. Вернемся к нашему геометрическому объекту, n помеченных элтов которого мы можем окрашивать в $\le k$ цветов. Предположим теперь, что мы не просто хотим получить общее кол-во способов окраски этих n элтов в $\le k$ цветов, а получить некоторую более подробную информацию об этих способах

• 1) В качестве примера вернемся к задаче о раскраске вершин квадрата в ≤ 2 (не более чем) цвета. Мы знаем, что $\exists$ всего 6 геометрически различных способа такой раскраски; а именно



Теперь предположим, что нам необходимо узнать более подробную информацию об этих способах, например, сколькими способами мы можем окрасить ровно i вершин в черный цвет (и, как следствие, ровно $(n-i)$ вершин — в белый)? В чрезвычайно важной задаче перечисления графов аналогичный вопрос формулируется с.о.: сколько графов на n вершинах имеет ровно i ребер?

2) Вполне удовлетворительным ответом на поставленный выше вопрос было бы построение производящей ф-ции, например, следующего вида:

$$1+x+2x^2+x^3+x^4 =: W(x).$$

~~Действительно~~, коэф-ты при x^i (в которой) дают нам кол-во способов окраски i вершин квадрата в черный цвет и $(n-i)$ вершин — в белый. При этом общее кол-во способов окраски получится подстановкой значения $x=1$ в $W(x)$

3) Ф-ция W(~~x~~) в англоязычной литературе носит название <u>configuration counting series</u> (т.е. ряд, перечисляющий конфигурации) или pattern inventory ([ɪnventrɪ] перечень (неэквивалентных) pattern структур).

Наша задача состоит в том, чтобы научиться строить такие ф-ции W. Смысл: мы разбиваем все мн-во Y (доселе единое) на классы в зависимости от принимаемых ими значений весов эл-тов $y \in Y$. Именно по этим классам мы и будем затем классифицировать → см. (2а–2в)

2. Построение производящей ф-ции W будем производить в 3 этапа. На 1-м этапе мы введем производящую ф-цию на мн-ве Y цветов (т.н. перечень цветов)

1) Для этого ~~введем~~ определим для ∀ эл-та $y \in Y$ его вес с.о. пусть

$$w: Y \longrightarrow K \quad -$$

~~...~~ отображение Y в некоторое коммутативное кольцо K (т.е. мн-во с введенными на нем 2-мя операциями — сложением и умножением, такими, что сложение эл-тов K есть абелева группа, умножение ~~...~~ эл-тов K также есть абелева группа ⊕ выполняются законы дистрибутивности ~~...~~ для этих операций — т.е. $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$) практически ничего делать не можем,

Зачем нам нужно именно кольцо? Дело в том, что эл-ты мн-ва Y мы складывать не можем (непонятно, как сложить, делить и умножать, ни их перемножать, цвета)

Так как элементы кольца можно складывать, то, сложив все веса, т.е. все образы эл-тов $y \in Y$ при отобр-ии $w: Y \to K$, мы получим в K энумератор или производящую ф-цию мн-ва Y цветов, или, по терминологии Пойа и де Брёйна, <u>перечень</u> (inventory) (цветов):

$$\varphi \overset{def}{:=} \sum_{y \in Y} w(y) \quad \in K$$

Де Брейн и Пойа называют такие Y <u>запасом</u> (store) ⇒

⇒ φ называют перечнем запаса (store inventory) (или inventory Y)

1.5. Ещё раз о том, что такое производящая функция и ~~зачем она нужна~~ в чём её смысл.

1) Пусть Y – это некоторое множество – конечное или счётное, например, множество всех перечисляемых объектов или множество ~~всевозможных~~ некоторых комбинаторных действий, (которые мы можем совершить) с выбранными объектами. Оно пока однородно и едино.

2) Но: как правило, (при перечислении нам) удобнее это множество (сначала) классифицировать, или разбить на классы (а затем перечислять эти в каждом классе отдельно). Например,

а) множество всех товаров на складе удобно ~~разбить~~ {классифицировать} ~~на~~ по виду товаров (мыло, чай, вино).

б) множество всех корневых непомеченных деревьев удобно разбить на классы, содержащие равное (одинаковое) количество вершин.

Тогда такое множество, разбитое на классы, легче перечислять. Например, легко перечислить все деревья с $n=1,2,3$ и ~~но~~ сложнее – все деревья (тем более, что их – ∞-ное число); легче сосчитать все бутылки вина на складе, чем все предметы на складе; легче перечислить всех собак одной породы, живущих в данном городе, чем всех собак, живущих на Земле, и т.д.

3) Но как чисто ~~формально~~ технически это сделать?

Ответ: нужно приписать $\forall$ элту ~~эл~~ $y \in Y$ некоторый вес, и затем уже классифицировать все предметы по их весам.

Формально: нужно ввести отображение

$$w : Y \to K \text{ – некоторое коммутативное кольцо.}$$

Тогда все элты Y разбиваются на классы в зависимости от значений весов $w(y)$ элтов $y \in Y$, мощности $|w^{-1}(k)| =: c_k$

Этот факт (м.б.) записывается с.о.:

$$Y = \bigcup_{k\in K} \{y \mid w(y)=k\in K\}$$

При этом мн-ву Y в K отвечает элемент

$$\sum_{y\in Y} w(y) = \sum_{k\in K} c_k\cdot k,$$ где $c_k = |w^{-1}(k)|$ – кол-во эл-тов $y\in Y$ веса $w(y)=k$,

называемый <u>энумератором мн-ва Y</u>.

4) <u>Пример</u>. Товары на складе: $\exists\, Y$ – мн-во товаров,

$$Y=\{м_1, м_2, м_3, ч_1, ч_2, ч_3, ч_4, в_1, в_2\}.$$

Пусть $w(м_i)=м$; $w(ч_i)=ч$; $w(в_i)=в$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow Y = \{м_1,м_2,м_3\}\cup\{ч_1,ч_2,ч_3,ч_4\}\cup\{в_1,в_2\};$$

$$\text{enumerator}(Y) = 3м + 4ч + 2в.$$

5) А что такое тогда (в этой идеологии есть) производящая (однозначная) функция $\varphi(z)$ одного аргумента z? Это – частный случай данной конструкции, когда в качестве кольца K выбирается кольцо $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_+}\equiv\mathbb{C}^{\aleph_0}$ счетных последовательностей комплексных чисел $(a_0,a_1,a_2,\dots)$, $a_i\in\mathbb{C}$, т.е. мн-во

$$\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_+}\equiv\mathbb{C}^{\aleph_0} \stackrel{def}{:=} \{(a_0,a_1,a_2,\dots)\mid a_i\in\mathbb{C}\ \forall i\in\mathbb{Z}_+\}$$

с введенными на нем следующими 2-мя операциями:

а) сложение:

$$(a_0,a_1,a_2,\dots) + (b_0,b_1,b_2,\dots) \stackrel{def}{:=} (a_0+b_0, a_1+b_1, a_2+b_2,\dots)$$

б) умножение:

$$(a_0,a_1,a_2,\dots)\cdot(b_0,b_1,b_2,\dots) \stackrel{def}{:=} (c_0,c_1,c_2,\dots),$$ где $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$

Так, в задаче о раскраске чего-либо в 2 цвета, когда $Y=\{y_1,y_2\}$: $\exists\ w(y_1)=(1,0,0,\dots)$;

$w(y_2)=(0,1,0,\dots)$; $\Rightarrow$ энумератор $=(1,1,0,0,\dots)\in K$

б) Однако: на практике с этим кольцом удобнее работать как с кольцом $\mathbb{C}[[z]]$ формальных степенных рядов. В этом кольце для элта $(0,1,0,0,\ldots)$ вводится специальное обозначение:

$$(0,1,0,0,\ldots) =: z.$$

~~Тогда~~ Несложно убедиться, что

$$z^n :\overset{def}{=} \underbrace{z\cdot\ldots\cdot z}_{n} = (0,0,\ldots,0,\underset{n}{1},0,\ldots).$$

Действительно,

$$z^2 = (0,1,0,0,\ldots)\cdot(0,1,0,\ldots) = (0\cdot 0, 1\cdot 0+0\cdot 1, 0\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot 0, 0, 0,\ldots)$$

$$z^3 = z\cdot z^2 = (0,1,0,\ldots)\cdot(0,0,1,0,\ldots) = (0\,0, 1\cdot 0+0\,0, 0\,0+1\cdot 0+0\cdot 1, 0\,0+1\cdot 1+0\,0\ldots$$

Далее по индукции:

$$z\cdot z^{n-1} \overset{\text{по индукции}}{=} (0,1,0,\ldots)\cdot(0,0,\ldots,0,\underset{n-1}{1},0,\ldots) = (0,0,\ldots,0,1\cdot 1,0,\ldots)$$

Как следствие, $\forall$ элемент кольца $\vec{a}$ м.б. записан в след. виде:

$$\vec{a} = (a_0,a_1,a_2,\ldots) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n =: a(z) \in \mathbb{C}[[z]]$$

---

7) Теперь: возвращаясь к мн-ву Y: введем следующее отображение $w: Y \to \mathbb{C}[[z]]$, сопоставляющее $\forall$ элту $y\in Y$ формальный степенной ряд вида

(т.е. приписываем $\forall$ элту $y\in Y$, по сути, некоторый вес $k\in\mathbb{Z}_+$)

$$w[y] = 0+0\cdot z+0\cdot z^2+\ldots+0\cdot z^{k-1}+1\cdot z^k+0\cdot z^{k+1}+\ldots$$

~~т.е. вес $=k$,~~

~~то: энумератор мн-ва Y примет след. вид:~~

$$\cancel{\sum_{y\in Y} w[y] = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{y\in Y} a_n(y)\Big) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n =: \varphi(z)}.$$

~~Функ $\varphi(z)$ и будет тогда привычной нам обыкновенной производящей функцией для мн-ва Y, в которой коэфнт c_n~~

Тогда: Σ-уя образы по всем $y\in Y$, получаем энумератор $\varphi(z)$ вида

или, более строго, вес $(0,0,\ldots,0,\underset{n}{1},0,\ldots)$

$$\varphi(z) = \sum_{y\in Y} w[y] = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n, \quad \text{т.е.}$$

формальный степенной ряд, коэфты c_n которого дают нам кол-во элтов $y\in Y$, имеющих вес $n\in\mathbb{Z}_+$. Этот ряд $\varphi(z)$ и называется

2) Примеры

а) В задаче о раскраске вершин квадрата в не более чем 2 цвета:

$$\exists \quad w(y_1) =: b \text{ (черный цвет)}; \quad w(y_2) =: w \text{ (белый цвет)} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = b + w \quad \text{- перечень (или производящая функция) цветов}$$

б) В той же задаче: $\exists\ K = \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ – коммутативное кольцо всех целых неотрицат. чисел;

$$\exists \qquad w(y_1) = 0; \quad w(y_2) = 1 \;\Rightarrow\; \varphi = 0 + 1.$$

Однако такая форма записи не очень удобна ⇒ удобнее в K ввести настоящую производящую функцию вида

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k, \text{ где}$$

$c_k = |w^{-1}(k)|$ – количество этих $y \in Y$ (цветов), имеющих один и тот же вес k. Так, в нашем примере

$$\varphi(z) = 1 + z.$$

в) $\exists$ теперь вершины квадрата раскрашиваются в не более чем 3 цвета. В этом случае в кач-ве K можно взять декартово пр-ие вида $K = \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad w : Y \to \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ :$$

$$w(y_1) = (0,0); \quad w(y_2) = (1;0); \quad w(y_3) = (0,1).$$

Но: и здесь удобнее работать с функцией 2х переменных вида

$$\varphi(z_1, z_2) = \sum c_{ij} z^i z^j, \qquad c_{ij} = |w^{-1}(i,j)| -$$

количество элементов $y \in Y$ заданного веса $w(i,j)$. Так, у нас

$c_{00} = c_{10} = c_{01} = 1$, остальные $c_{ij} = 0 \Rightarrow \varphi(z_1, z_2) = 1 + z_1 + z_2$

г) До этого во всех примерах коэф-ты c_i принимали значения 0 или 1. А бывают ли другие варианты? Де Брейн предлагает следующий пример: ∃ на складе имеются 3 куска мыла, 4 пакета чая, 2 бутылки вина, т.е.

$$Y = \{ м_1, \dots, м_3, ч_1, \dots, ч_4, в_1, в_2 \};$$

на этом мн-ве можно ввести отобр-е $w: Y \to K$ с.о.:

$$w(м_1) = z_1, \dots, w(в_2) = z_9 \Rightarrow \varphi = z_1 + \dots + z_9.$$

Однако кладовщик, как правило, одинаковые предметы не различает ⇒ вводит весовую ф-цию с.о.:

$$w(м_i) = z_м; \quad w(ч_i) = z_ч; \quad w(в_i) = z_в \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi = 3z_м + 4z_ч + 2z_в$$

Если считать, что $K = \mathbb{Z}_+$, то это же можно описать так:

$$w(м_i) = 0; \quad w(ч_i) = 1; \quad w(в_i) = 2;$$

$$\varphi(z) = 3 + 4z + 2z^2.$$

д) Более серьезный пример: ∃ Y – мн-во всех корневых непомеченных деревьев. Для $\forall y \in Y$ в качестве веса возьмем кол-во вершин этого дерева $w(y) = n$. Тогда

$c_n = |w^{-1}(n)|$ – это кол-во всех деревьев с n вершинами, а

$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ – производящая ф-ция для Y.

На языке комбинаторных действий: у нас есть мн-во Y всех корневых помеченных деревьев. Комбинаторное действие состоит в следующем: выбрать из этого мн-ва дерево с n вершинами. Тогда c_n – это кол-во способов это сделать.

е) Наконец, мы можем всем этим $y \in Y$

$$w(y)=0 \quad \forall y \in Y \Rightarrow c_0 = |w^{-1}(0)| = |Y| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(z) = c_0 = k = |Y|$$

Теперь: теория Редфилда – Пойа подсказывает, что с этим делать: нужно взять и подставить это значение $\varphi(z)$ в цикловой индекс $Z_X(G)$ группы G, действующей на $|X|=n$ элтах нашей геом. фигуры. Так вот, это верно для конкретного, очень частного случая весовой функции w. Теорема Пойа обобщает этот результат на случай $\forall$ других производящих функций $\varphi(z)$.

Иными словами: задание энумератора на мнве Y индуцирует нам задание энумератора на мнве Y^X всех функций $f: X \to Y$

3. Определив вес $\forall$ элта $y \in Y$, мы теперь можем перейти ко 2-му этапу – определить вес функции

$$f: X \to Y, \quad f \in Y^X$$

Вот зачем нам нужно именно кольцо! До этого было достат. потребовать, чтобы K было группой

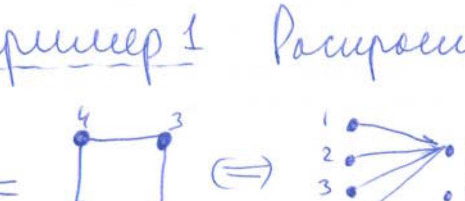
1) Следуя де Брейну, определим вес функции f с.о.: т.к. элементы кольца мы можем не только складывать, но и перемножать, то положим, по определению,

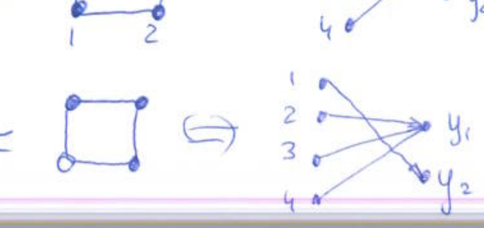
$$W(f) := \prod_{x \in X} w(f(x)), \quad W(f) \in K \quad \forall f \in Y^X.$$

Просуммировав теперь по всем $f \in Y^X$, мы получим энумератор (перечень) $\sum_{f \in Y^X} W(f)$ мнва Y^X!

2) Рассмотрим вновь несколько характерных примеров

a) Пример 1 Раскраска вершин квадрата в ≤ 2 цвета:

$\exists\ f_1 =$  , если $w(y_1) = b$, $w(y_2) = w$, то $W(f_1) = \prod_{i=1}^{4} w(f(x_i)) = b^4$

$\exists\ f_2 =$  $\Rightarrow W(f_2) = w \cdot b^3$.

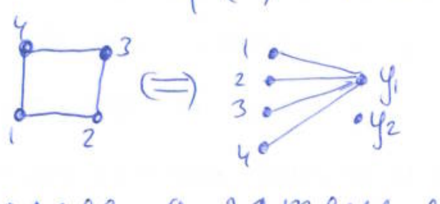
Продолжая далее, т.е. перебирая все $2^4=16$ функц, мы получим следующее выражение для суммы всех весов:

энумератор мн-ва функц Y^X: $$\sum_{f\in Y^X} W(f) = b^4+4b^3w+6b^2w^2+4bw^3+w^4 = (b+w)^4 \in K$$

т.е. мы классифицировали (разбили на классы) мн-во Y^X всех положений эл-тов Γ, окрашенных в $\in K$ цветов в зависимости от ~~[illegible]~~

б) Пример 2 Тот же пример, но с энумератором-обыкновенной производящей функц

$$\varphi(z) = 1+z$$

$\exists\ f_1 =$  , если $w(y_1)=z$, $w(y_2)=1$, то $W[f_1]=z^4$.

Продолжая далее, а затем суммируя результаты, получим

$$\Phi(z) := \sum_{f\in Y^X} W(f) = z^4+4z^3+6z^2+4z+1 = (z+1)^4 = [\varphi(z)]^4$$

Производящую функц на мн-ве всех отображ $f: X\to Y$ (!).

3) Какие выводы мы можем сделать из ~~[illegible]~~ рассмотрения этих примеров?

а) Задание энумератора (или производящей функц для мн-ва Y индуцирует задание некоторого вполне определенного энумератора (или перечня или производящей функц) для мн-ва всех функц $f\in Y^X$ - эта того же кольца K, что и для ~~[illegible]~~ отобр-я $w: Y\to K$. При этом смысл этого энумератора тот же - а именно, разбиение всего мн-ва Y^X отображ на классы в зависимости от значений весов указанных отображ.

б) В рассмотренных примерах мы получили след. интересный результат: если энумератор мн-ва Y есть $\sum_{y\in Y} w(y)$, то соответствующий ему энумератор мн-ва Y^X всех отображ

$$\sum W(f) = \left[\sum_{y\in Y} w(y)\right]^{|X|=n}$$

4) Оказывается, последний результат справедлив и в общем случае. Докажем это.

а) Распишем подробнее правую часть этого равенства, т.е.

$$\left[\sum_{y\in Y} w(y)\right]^{n=|X|} = \underbrace{\left[w(y_1)+\ldots+w(y_k)\right]\cdot\left[w(y_1)+\ldots+w(y_k)\right]\cdot\ldots\cdot\left[w(y_1)+\ldots+w(y_k)\right]}$$

Заметим, прежде всего, что при перемножении этих скобок (n штук сомножителей) я получаю ровно K^n слагаемых. Действительно, я из 1й скобки K способами выбираю 1й сомножитель, затем K способами — 2й сомножитель из 2й, ...) $\Rightarrow$ $\underbrace{K\cdot K\cdot\ldots\cdot K}_{n} = K^n$. Но: ведь и функций из $X \to$ в Y $\exists$ ровно столько же — т.е. K^n.

Установим взаимно-однозначное соотв-вие между (штук) этими K^n слагаемыми и всеми K^n функциями $f: X\to Y$. Для этого я установлю ~~этими n сомножителями~~ вз.-одн. соотв. между n скобками и $n=|X|$ эл-тами мн-ва X, {например, считая, что 1я скобка отвечает эл-ту $x_1\in X$, 2я — эл-т $x_2\in X$, ..., nя — эл-т $x_n\in X$} Иными словами, будем полагать, что все эти y_i в 1й скобке есть образы эл-та $x_1\in X$, все эти y_i во 2й скобке — образы эл-та $x_2\in X$, и т.д.

~~б) Тогда: при перемножении этих n скобок: у нас получится ровно K^n слагаемых (т.е. ровно столько, сколько $\exists$ отобр-ий $f: X\to Y$) следующего вида:~~

$$\cancel{\prod_{x\in X} w(f(x))}$$

iя скобка $\leftrightarrow x_i\in X$

б) Тогда: при таком вз.-одн. соотв-ии выбор некоторого слагаемого из 1й скобки (напр. $w(y_i)$) задает нам некоторое значение $f(x_1)=y_i$ (принимающую на эл-те x_1), выбор слагаемого из 2й скобки — $f(x_2)$ ($w(y_j)$), ..., что функ. f, у которой $f(x_2)=y_j$. В целом же такой выбор (по слагаемому из $\forall$ скобки) задает нам некот. ф-цию $f\in Y^X$, и этой ф-ции в результате перемножения скобок отвечает внутр. вида

$$\prod_{x\in X} w(f(x)),\ \text{т.е., по опр-ию, } W(f) \text{ — вес этой ф-ции}$$

в) Всего после перемножения получаем K^n слагаемых, отвечающих всем K^n функциям $f\in Y^X$ $\Rightarrow$ получаем

$$\sum_{f\in Y^X} W(f), \text{ что и требовалось.}$$

4. Теперь предположим, что на мн-ве $\tilde{X}$ (здесь тоже объясн $\Pi\tilde{X}$) действует группа G, т.е. задан бинарный опер-р $\circ: G\times\tilde{X}\to\tilde{X}$. Это действие индуцирует действие $\otimes$ на мн-ве $Y^{\tilde{X}}$ всех функций $f: \tilde{X}\to Y$ по ф-ле

$$(g\otimes f)(x) \stackrel{def}{=} f(g^{-1}\circ x)$$

~~Это~~ Действие $\otimes$ вводит на мн-ве $Y^{\tilde{X}}$ ~~всех~~ функций отношение экв-ти, которое, в свою очередь, разбивает все мн-во $Y^{\tilde{X}}$ на классы эквив-ти. Для подсчета общего кол-ва этих классов можно использовать лемму Бернсайда. Пот-ом упростим этот расчет, используя цикловой индекс образа группы G при гомом-зме

$$G\to S_n,\ n=|X|.$$

Теперь: в предыдущем пункте мы ввели веса $W(f)$ для функций, а также энумераторы (или перечни) для множества $Y^{\tilde{X}}$ всех этих функций, разбив, тем самым, все мн-во $Y^{\tilde{X}}$ на классы в зависимости от значений весов этих функций. При этом кол-во функций в данном классе можно определить с использованием ф-лы

$$\sum_{f\in Y^X} W(f) = \Big(\sum_{y\in Y} w(y)\Big)^{|\tilde{X}|}.$$

Возникает вопрос: а как меняет эту картину действие группы G на мн-ве $Y^{\tilde{X}}$?

1) Прежде всего, вспомним опр-е эквивалентных функций (или функций, принадлежащих одной орбите):

$$f_1\sim f_2 \iff \exists g\in G:\ f_1(x)=f_2(g^{-1}\circ x)\ \forall x\in X.$$

Покажем ~~теперь~~, что эквивалентные функции имеют один

2) Ну действительно, рассмотрим

$$W[f_1] \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{x\in X} w(f_1(x)) = \prod_{x\in X} w(f_2(g^{-1}\circ x)) = \prod_{x\in X} w(f_2(x))$$

Последнее равво выполняется в силу того, что левое и правое произведения имеют одни и те же сомножители, разве что расположенные в разном порядке. Но: кольцо K – коммутативное $\Rightarrow$ порядок следования сомножителей роли не играет $\Rightarrow$ левая и правая часть равны.

Т.о. справа стоит

$$\prod_{x\in X} w(f_2(x)) = W[f_2]$$

$$\Rightarrow \text{ если } f_1 \sim f_2 \xRightarrow{\text{то}} W(f_1) = W(f_2)$$

Нужен пример!

Как следствие, мы можем ввести энумератор (или произв. функцию) на мн-ве классов экв-ти (орбит) С.О.: мы можем приписать вес $\forall$ классу $F \in Y^X/G$ как $W(F) = W(f)$ для $f \in F$, т.е. брать в роли веса $\forall$ класса экв-ти F вес $\forall$ его представителя, а затем просуммировать эти веса $\sum_{F\in Y^X/G} W(F) \in K$ – то, что получится и будет искомым pattern inventory(!)

3) Итак, мы показали, что эквивалентные функции имеют одинаковые веса. К сожалению, обратная импликация не верна: могут $\exists$-ть неэквив-ные функции имеющие одинаковые веса.

Как их сосчитать! В принципе мы можем сосчитать кол-во

Пример: в задаче о раскраске квадрата в ≤ 2 цвета:

$\exists\ f_1 \sim$ [квадрат] ; $W(f_1) = b^2 w^2 (\text{или}) z^2$

$\exists\ f_2 \sim$ [квадрат] ; $W(f_2) = b^2 w^2 (\text{или}) z^2$

$\Rightarrow W(f_1) = W(f_2)$, $f_1 \nsim f_2$.

---

4) Возникает вопрос: а как нам сосчитать кол-во неэквивалентных функций, имеющих одинаковые вес?

В принципе, это можно сделать, используя т.н. ограниченную форму леммы Бернсайда.

а) Именно, $\exists\ Z \subset Y^X$ – некоторое подмн-во мн-ва Y^X, замкнутое относительно действия группы G (т.е. действие группы G не выводит нас из этого мн-ва). Тогда непосредственным следствием леммы Бернсайда ...

просто ее переформулированной в терминах мн-ва Z) является

<u>Утверждение</u>.

$$|Z/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Z^g|$$

б) Теперь: возьмем в кач-ве $Z \subset Y^X$ подмн-во функций, имеющих заданный вес. Мы доказали, что если функция f_1 имеет вес $W(f)$, то и ~~ф~~ $\forall$ функция $f_2 = g * f_2$ имеет тот же самый вес $W(f) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ это подмн-во Z замкнуто относит. действия группы G
$\Rightarrow$ к нему применима ограниченная форма леммы Бернсайда.

в) Итак, используя этот вариант леммы Бернсайда можно, в принципе, считать кол-во эквивалентных функций, имеющих заданный вес $\in K$. Однако, как и в задаче подсчета <u>всех</u> функций, имеющих заданный вес, значительно проще ~~[illegible]~~ это сделать, составив ~~[illegible]~~ сразу всю производящую функцию или энумератор или перечень для фактор-мн-ва Y^X/G (т.н. перечень (неэквивалентных) структур* или ряд, перечисляющий конфигурации). Точнее говоря, также, как и для энумератора мн-ва Y^X всех функций, мы выразим энумератор классов экв-ти через энумератор мн-ва Y цветов!

Именно, $\exists$ $F \in Y^X/G$ – элемент фактор-мн-ва Y^X/G. Определим вес $W(F)$ этого эл-та как вес $\forall$ функции $f(x) \in F$:

$$W(F) \overset{def}{:=} W(f), \text{ где } f(x) - \forall \text{ функция } f \in F.$$

Тогда, по определению, перечень (неэквив.) структур есть $\sum_{F \in Y^X/G} W(F)$; оказывается, этот перечень явным образом выражается через перечень $\sum_{y \in Y} w(y)$ цветов.

5. <u>Теорема</u> (Основная Тh Пойа) Перечень (неэквивалентных) структур (или ряд, перечисляющий конфигурации) равен

$$\sum_{F\in Y^X/G} W(F) = Z_G\left(\sum_{y\in Y} w(y), \sum_{y\in Y} w^2(y), \dots, \sum_{y\in Y} w^n(y)\right),$$

где $Z_G(a_1, \dots, a_n)$ - цикловой индекс группы G, действующей на n-элтном мн-ве $\tilde{X}$.

1) Пусть $\{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ - это мн-во <u>всех</u> различных значений весов функций $f\in Y^X$; $\omega_i \in K$ $\forall i=1,\dots,m$.

Тогда
$$\sum_{F\in Y^X/G} W(F) = \sum_{i=1}^{m} \omega_i \cdot \left\{\begin{matrix}\text{кол-во классов экв-ти } F,\\ \text{вес которых } W(F_i)=\omega_i\end{matrix}\right\}.$$

2) Однако для $\forall i$ кол-во классов экв-ти F, имеющих заданный вес, мы знаем - оно дается ограниченной формой леммы Бернсайда:

$$N(\omega_i) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\left\{\begin{matrix}\text{кол-во эл-тов } f\in Y^X \text{, имеющих}\\ \text{заданный вес } W(f)=\omega_i \text{ и остающихся}\\ \text{неподвижными под действием эл-та } g:\ g\circledast f=f\end{matrix}\right\}$$

3). Тогда меняя порядок Σ-ия, получаем, что

$$\sum_{F\in Y^X/G} W(F) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \omega_i \cdot \left\{\begin{matrix}\text{кол-во } f\in Y^X\text{: } W(f)=\omega_i\\ \oplus\ g\circledast f=f\end{matrix}\right\}}_{\displaystyle \sum_{f:\, g\circledast f=f} W(f)}$$

Действительно, взяв для фиксированного $g\in G$ все функции $f\in Y^X$, для которых $g\circledast f=f$, и просуммировав их веса, получим

$$\sum_{f:\, g\circledast f=f} W(f) = \omega_1\cdot\left\{\begin{matrix}\text{кол-во функций:}\\ g\circledast f=f \text{ и}\\ W(f)=\omega_1\end{matrix}\right\} + \dots + \omega_m \left\{\begin{matrix}\text{кол-во функций:}\\ g\circledast f=f \text{ и}\\ W(f)=\omega_m\end{matrix}\right\} = \dots$$

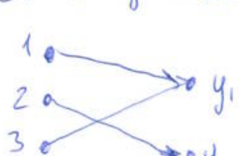
4) Осталось сосчитать для $\forall$ фиксированного $g \in G$
$$\sum_{f:\, g\circ f = f} W(f).$$
Лучше вначале понять, как считать такую сумму на примере. Возьмем наш ~~ста~~стандартный пример — задачу об окраске вершин квадрата в ≤ 2 цвета.

а) Будем для $\forall$ элта $g \in D_4$ считать вес функций, остающихся неподвижными под действием этого элта $g \in D_4$.

б) Нейтральный элт $e \cong$ перестановке $(1)(2)(3)(4)$, имеющей цикловой тип a_1^4. Для такого элта все функции остаются неподвижными $\Rightarrow$ имеем просто
$$\sum_{f \in Y^X} W(f) = \Big[\sum_{y \in Y} w(y)\Big]^n \underset{\text{в нашем случае}}{=} (\text{б}+w)^4$$

в) ~~Перестановка~~ Поворот на 90° $a \cong (1234)$, имеющей цикловой тип a_4^1: здесь только 2 функции остаются неподвижными: имеющая вес б^4 и имеющая вес w^4 $\Rightarrow$
$$\Rightarrow \sum_{f:\, a\circ f = f} W(f) = \text{б}^4 + w^4 = \sum_{y \in Y} w^4(y)$$
Аналогично и для ~~перестановки~~ поворота на 270°: $c \cong (1432)$.

г) ~~Перестановка~~ Поворот в на 180° $\cong$ перестановке $(13)(24)$ с цикловым индексом a_2^2: для такого действия вновь остаются неподвижными функции f_1 с весом $W(f_1) = \text{б}^4$ и f_{16} с весом $W(f_{16}) = w^4$. Однако здесь имеются и еще 2 функции, остающиеся неподвижными:

f_2:  ; $w(y_1) = \text{б}$, $w(y_2) = w$; $W(f_2) = \text{б}^2 w^2$.

f_3:  $W(f_3) = \text{б}^2 w^2$.

Т.о. имеем $\sum\limits_{f:\, b\circ f=f} W(f) = b^4+2b^2w^2+w^4=(b^2+w^2)^2$.

8) Ненадолго остановимся и проанализируем полученные к этому моменту рез-ты:

Элемент $g\in G$	Перестановка и ее цикл. тип	$\sum\limits_{f:\, g\circ f=f} W(f)$
e	$(1)(2)(3)(4) \div a_1^4$	$(b+w)^4$
a, c	$(1234), (1432) \div a_4^1$	(b^4+w^4)
b	$(13)(24) \div a_2^2$	$(b^2+w^2)^2$

Уже видна определенная закономерность. Именно, $\exists$ эту $g\in G$ в группе S_n отвечает перестановка σ, имеющая цикловой тип

$$a_1^{i_1}\cdot a_2^{i_2}\cdot\ldots\cdot a_n^{i_n}, \quad i_1\cdot 1+i_2\cdot 2+\ldots+i_n\cdot n=n.$$

Рассмотрим в ней один из циклов, например длины m: (т.е. $\sim a_m$): (1) Очевидно, что любая функция, остающаяся постоянной под действием $g\in G$ должна ~~обеспечивать~~ иметь одинаковое значение на этих m элтах, одинаковое, но $\underline{\forall}$ из k ($k=|Y|$) возможных. (2) Теперь: что такое вес функции? ~~одинаковый вес всем элтам данного цикла. Но: в~~ Вес функции - это произв. весов $\underline{n}$ образов. Если в перестановке σ имеется цикл длины m, то ~~цикле m элтов $\Rightarrow$ ... совокупность этих элтов~~ m сомножителей из этих n должны быть равны или $w^m(y_1)$, или $w^m(y_2)$, ... или $w^m(y_k)$ ~~должны иметь веса $w^m(y)$ — какие конкретно — не важно~~, $k=|Y|$ $\Rightarrow$ имеем сомножитель $(w^m(y_1)+\ldots+w^m(y_k))$, отвечающий циклу длины m. ~~Важно лишь, что одинаковые~~. Так, для перестановки

$$(13)(24)\cong b:\ \sum_{f:\, b\circ f=f} W(f)=\sum_{f:\, b\circ f=f}\ \prod_{x\in X} w(f(x))=(b^2+w^2)(b^2+w^2)$$

~~элты 1 и 3 должны иметь одинаковый вес: $w(y_1)$ или $w(y_2)$; слово „или" превращается в знак „+") этому циклу отвечает сомножитель $w^2(y_1)+w^2(y_2)=b^2+w^2$.~~

В общем случае должны иметь следующий сомножитель, отвечающий циклу a_m:

$$\left(\sum w^m(y)\right)$$

г) С учетом последнего замечания достаточно легко дозаполнить таблицу:

d, f	(13)(2)(4) $\div a_2 a_1^2$ (24)(1)(3) $\div$	$(b^2+w^2)(b+w)^2$
g, h	(14)(23) (12)(34) $\div a_2^2$	$(b^2+w^2)^2$

Суммируя эти выраж. и поделив на порядок $|D_4|=8$ группы, мы и получаем желаемый рез-т:

$$\sum_{F\in Y^X/G} W(F) = b^4 + b^3 w + 2w^2 b^2 + b w^3 + w^4$$

5) Итак, анализ этого примера уже убедил нас в том, что

$$\sum_{F\in Y^X/G} W(F) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{f:\, g\circ f=f} W(f) = Z_G\Big(\sum_{y\in Y} w(y), \dots, \sum_{y\in Y} w^n(y)\Big),$$

где $Z_G(a_1,\dots,a_n)$ – цикловой индекс группы G, действующей на n-элемом мн-ве $\tilde{X}$.

Но, в для полноты ощущений, докажем этот рез-т формально.

а) Итак, $\exists$ элту $g\in G$ отвечает в S_n перестановка σ, имеющая цикловой тип

$$a_1^{i_1}\cdot a_2^{i_2}\cdot\ldots\cdot a_n^{i_n}, \quad 1\cdot i_1 + 2 i_2 + \ldots + n\cdot i_n = n,$$
$$i_1+i_2+\ldots+i_n =: j \quad \text{(т.е. перестановка } \sigma \text{ имеет } j \text{ циклов разной длины)}.$$

Как заметили Рэдфилд и Пойа, для того, чтобы функция f не менялась под действием $g\in G$, необх. и достаточно, чтобы f принимала одинаковые значения на всех элтах любого из j циклов.

б) Теперь: по сути, это означает, что мн-во $\tilde{X}$ разбивается на j непересекающихся областей $\tilde X_1, \dots, \tilde X_j$ (j блоков), на каждой из которых функ $f \in Y^{\tilde X}$ принимает некоторое фиксированное значение $(f_1, f_2, \dots, f_j)$. Заметим, что все эти $f_1, f_2, \dots, f_j$ могут различаться или совпадать частично или полностью — нам это не важно.

Покажем, что в этом случае

$$\sum_{f:\, g\circ f = f} W(f) \overset{(*)}{=} \prod_{l=1}^{j} \Big(\sum_{y \in Y} w^{|\tilde X_l|}(y) \Big),$$ где $|\tilde X_l|$ — размер $l^{\text{ой}}$ области

$$= \Big\{ \sum_{y\in Y} w^1(y) \Big\}^{i_1} \cdot \Big\{ \sum_{y\in Y} w^2(y) \Big\}^{i_2} \cdots \Big\{ \sum_{y\in Y} w^n(y) \Big\}^{i_n} \Rightarrow$$

в случае перестановки σ цикл. типа $a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n}$

$\Rightarrow$ докажем и Th Пойа.

в) Для д-ва (*) де Брейн предлагает, прежде всего, представить $f(x)$ в виде композиции 2-х функций:

$$f(x) = \chi(\psi(x)) = \chi \circ \psi(x),$$ где

1. $\psi(x): x \longmapsto l \iff \psi(x) = l$, где l — индекс той компоненты $\tilde X_l$, к которой x принадлежит

$\boxed{\psi(x) = l \iff x \in \tilde X_l}$; т.е. $\psi: \tilde X \to \{1, 2, \dots, j\}$.

2. $\varphi(l): l \longmapsto y(l) \in Y$, т.е. $\varphi: \{1, 2, \dots, j\} \longmapsto Y$

Заметим, что функ $\psi(x)$ — фиксирована и определена типом перестановки $\sigma \in S_n$; для функ φ же $\exists\ |Y|^j$ возможностей (т.е. $\exists\ k^j$ таких функций).

г) Теперь: как и при вычислении $\sum_{f \in Y^X} W(f)$, перепишем подробно правую часть выраж (*):

$$\{ w^{|\tilde X_1|}(y_1) + \dots + w^{|\tilde X_1|}(y_k) \} \{ w^{|\tilde X_2|}(y_1) + \dots + w^{|\tilde X_2|}(y_k) \} \cdots \{ w^{|\tilde X_j|}(y_1) + \dots + w^{|\tilde X_j|}(y_k) \}$$

При перемножении: получим ровно $|Y|^j = k^j$ слагаемых, $\forall$
(я беру $\forall$ из k слаг. в 1й скобке, $\forall$ из k — во 2й, …, $\forall$ из k — в jй $\Rightarrow$ $k \cdot k \cdots k = k^j$ вариантов)
из которых получается выбором $\forall$ из k слагаемых в $\forall$ из j

этот элемент может принять $\forall$ из k знач

скобок (т.е. ... выбором ... функц φ: ...

В результате такого выбора я получаю выр-ие вида

$$\{w^{|\tilde X_1|}(\varphi(1))\}^{|\tilde X_1|}\{w^{|\tilde X_2|}(\varphi(2))\}\cdots\{w^{|\tilde X_j|}(\varphi(j))\} =$$

$$= \prod_{l=1}^{j}\{w^{|\tilde X_l|}(\varphi(j))\} = \prod_{l=1}^{j}\prod_{x\in\tilde X_l} w(\varphi(\psi(x))) = \prod_{l=1}^{j}\prod_{x\in\tilde X_l} w(f(x)) =$$

$$= \prod_{x\in X} w(f(x)) = W(f) -$$

т.е. вес функ, определенной выбором функ φ при фиксированной функ $\psi(x)$.

Итак, задание эл-та $g \in G$ задает мне однозначно функ $\psi(x)$; выбор же ∀ из K слагаемых в каждой из l скобок задает мне некоторую функ $\varphi(x)$, т.е. некоторую (одну из K^l возможных) функ $f(x)$, таких, что $g \circ f = f$.

Перебирая все такие (K^l слагаемых), мы и получим веса $W(f)$ всех K^l функ, таких, что $g \circ f = f$ ⇒ доказываем (*).

6. Замечание 1. Анализ всех результатов этого §-фа еще раз нам показал, что, как правило, саму производящую функ (или перечень, или энумератор) искать значительно легче, чем число элементов этого перечня, имеющих заданный вес (или число C_n - коэф-т при z^n — т.е. кол-во эл-тов, имеющих заданный вес $z^n \cong (0,0,\dots,0,1,0,\dots)$). Т.е. совокупность всех таких коэф-тов сразу искать легче, чем ∀ каждый из них в отдельности.

Замечание 2. В случае производящей функ $\varphi(z)$ для мн-ва Y цветов: $\varphi(z)=\sum^{+\infty} c_m z^m = c_0+c_1z+c_2z^2+\dots$

Тогда Th Пойа для такой функции переформулируется с.о.:

$$\Phi(z) = \frac{1}{|G|}\, Z_{G,\tilde{X}}\Big(\underbrace{\sum_{m=0}^{+\infty} c_m z^m}_{\varphi(z)},\ \underbrace{\sum_{m=0}^{+\infty} c_m z^{2m}}_{\varphi(z^2)},\ \ldots,\ \underbrace{\sum_{m=0}^{+\infty} c_m z^{n\cdot m}}_{\varphi(z^n)}\Big),\quad n=|\tilde{X}|$$

7. Рассмотрим несколько характерных примеров приложения Th Пойа.

1) Пример 1 Задача о раскраске вершин квадрата в ≤ 2 цвета.

а) $Z_{D_4}(a_1, a_2, a_3, a_4) = \frac{1}{8}\left[a_1^4 + a_4^1 + 3a_2^2 + 2a_1^2 a_2\right]$;

$\exists\ \varphi(z) = 1 + z$ (т.е. вес белого цвета $= (0,0,0,..)$, а вес черного $= (0,1,0,..)$

б) Тогда $\Phi(z) = \frac{1}{8}\cdot\left[(1+z)^4 + (1+z^4) + 3(1+z^2) + 2(1+z)^2(1+z^2)\right] =$

$= 1 + z + 2z^2 + z^3 + z^4;\quad \Phi(1) = 6.$

2) Пример 2 Задача о раскраске ожерелья (т.е. $G = C_n$) в ≤ 2 цвета.

а) $Z_{C_n}(a_1, \ldots, a_n) = \frac{1}{n}\sum_{d\mid n} \varphi(d)\, a_d^{n/d}$; $\quad \exists\ \varphi(z) = 1+z \Rightarrow$

$\Rightarrow \Phi(z) = \frac{1}{n}\sum_{d\mid n}\varphi(d)\cdot(1+z^d)^{n/d} = \frac{1}{n}\sum_{d\mid n}\varphi(d)\cdot\sum_{i=0}^{n/d}\binom{n/d}{i} z^{i\cdot d}$

б) Теперь: для получения явного выраж. для коэф-та при z^k введем обозначение $k := i\cdot d \Rightarrow i = k/d$; $i = 0..n/d \Rightarrow$
$\Rightarrow k = 0..n \Rightarrow$ получаем:

$$\Phi(z) = \frac{1}{n}\sum_{d\mid n}\varphi(d)\sum_{k=0}^{n}\binom{n/d}{k/d} z^k = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \text{ где}$$

$$a_k = \frac{1}{n}\sum_{d\mid n \,\oplus\, d\mid k}\varphi(d)\binom{n/d}{k/d} = \frac{1}{n}\sum_{d\mid \text{НОД}(k,n)}\varphi(d)\binom{n/d}{k/d}.$$

в) В частности, когда k и n - взаимно-простые, $\text{НОД}(k,n)=1$, $d=1$ и мы получаем $a_k = \frac{1}{n}\binom{n}{k}$