Эйлеровы и гамильтоновы циклы

Практика

15 сентября 2017 г.

1 (0,5 балла)

Верно ли, что каждый простой эйлеров граф имеет четное количество ребер? А простой эйлеров граф, построенный на четном количестве вершин? А эйлеров двудольный граф?

2 (0,5 балла)

Верно ли, что в эйлеровом графе для любых двух ребер e_1 и e_2, инцидентных одной и той же вершине, обязательно найдется хотя бы один эйлеров цикл, в котором два эти ребра идут одно за другим?

3 (0,5 балла)

Доказать, что в эйлеровом графе мосты отсутствуют.

4 (1 балл)

Доказать, что в любом связном графе G найдется маршрут, который проходит по каждому из ребер графа G как максимум два раза.

5 (1 балл)

Пусть в связном графе G ровно $2k$ вершин имеют нечетную степень. Доказать, что в этом графе можно построить k эйлеровых путей.

6 (1 балл)

Имеется кусок проволоки длиной 12 сантиметров. На какое минимальное количество кусков его следует разрезать, чтобы из этих кусков можно было бы изготовить каркас кубика размерами $1 \times 1 \times 1$ при условии, что проволоку в процессе изготовления кубиков можно сгибать?

7 (1,5 балла)

Предположим, что связный граф G эйлеров. Рассмотрим следующий алгоритм обхода ребер графа G. Выберем произвольную вершину x_0, а также некоторое инцидентное ей ребро $e_1 := \{x_0, x_1\}$, и зафиксируем путь $T_1 := \{x_0, e_1, x_1\}$. Затем на i-м шаге, $i = 1, \ldots, m-1$, рассмотрим граф $G_i := G - E(T_i)$, полученный удалением пройденных ребер e_i пути T_i, а также вершину x_i, до которой мы с помощью этого пути T_i дошли. В случае, если x_i оказалась листом, добавим к пути T_i ребро $e_i = \{x_i, x_{i+1}\}$. В противном случае в качестве очередного ребра $e_i = \{x_i, x_{i+1}\}$ выберем ребро, не являющееся мостом в графе G_i, и добавим его к T_i. В обоих случаях получим новый путь

$$T_{i+1} = \{x_0, e_1, x_1, \ldots, x_i, e_i, x_{i+1}\}.$$

Доказать корректность этого алгоритма, а именно, показать, что описанный алгоритм завершится на $(m-1)$-м шаге построением эйлерового цикла T_m в исходном графе G.

8 (1 балл)

Рассмотрим еще один алгоритм поиска эйлерова цикла в связном эйлеровом графе G. Разобъем в каждой вершине графа инцидентные ей ребра на пары. Затем, начиная с какого-то ребра e, построим некоторый путь в графе G следующим образом: если мы вошли в вершину по одному из парных ребер, то выйти мы должны из нее по другому парному ребру. Завершится этот путь в ребре e', парном к e. В результате мы разобъем все множество ребер графа G на попарно непересекающиеся замкнутые пути $T_1, \ldots, T_k$, объединение которых даст нам все множество $E(G)$. В случае, если таковых оказалось два или более, последовательно объединим эти пути в один следующим образом: найдем среди этих замкнутых путей пару путей T_i и T_j, имеющих общую вершину x, и объединим эти пути в путь $T = T_1 \cup T_2$ большей длины, поменяв парность ребер в вершине x. Доказать корректность данного алгоритма, а именно, показать, что по его завершению мы получим эйлеров цикл в графе G.

9 (1 балл)

Реберным графом $L(G)$ графа G называется граф, в котором любая вершина x' отвечает некоторому ребру $e \in E(G)$ графа G, и в котором две вершины смежны между собой тогда и только тогда, когда соответствующие им ребра в графе G инцидентны одной и той же вершине. Доказать, что в случае регулярного связного графа G его реберный граф $L(G)$ является эйлеровым.

10 (1 балл)

В одном из упражнений главы 1 мы доказали, что любой граф G, минимальная степень δ в котором больше или равна двух, обязательно содержит цикл. Используя это утверждение и индукцию по количеству m ребер, дать еще одно доказательство достаточности условия Эйлера в неориентированном графе G.

11 **(1,5 балла)**

Построить для значений $n = 2$, $k = 4$ граф де Брейна и с его помощью найти хотя бы одну последовательность де Брейна $B(2, 4)$.

12 **(1,5 балла)**

Найти одну из последовательностей де Брейна $B(3, 3)$ длины 27, построив предварительно орграф на девяти вершинах, в котором последовательности $B(3, 3)$ отвечает эйлеров цикл.

13 **(0,5 балла)**

Доказать, что в графе G, в котором существует гамильтонов цикл, точки сочленения отсутствуют.

14 **(0,5 балла)**

Сформулировать необходимые условия существования гамильтонова цикла в двудольном графе $G[X, Y]$, $|X| = m$, $|Y| = n$.

15 **(1 балл)**

Подсчитать количество гамильтоновых циклов в полном графе K_n, построенном на $n > 2$ вершинах.

16 **(1,5 балла)**

Рассмотрим следующий алгоритм построения последовательности де Брейна

$$a_1, a_2, \ldots, a_{2^k}.$$

Возьмем на первом шаге в качестве $a_i = 0$, $i = 1, \ldots, k$. Для любого $m > k$ определим a_m как максимальное значение из $\{0, 1\}$, при котором последовательность

$$(a_{m-k+1}, \ldots, a_m)$$

не встречается в последовательности $(a_1, \ldots, a_{m-1})$ в виде непрерывной подпоследовательности. Доказать, что данный алгоритм действительно возвращает нам последовательность де Брейна.