

## Основные правила перечислительной комбинаторики. Биномиальные коэффициенты. (ДЗ)

Задачи для самопроверки(оформлять надо только если вы не уверены в правильности своего решения)

1. Сколько целых чисел от 1 до 100 не делится ни на два, ни на три, ни на пять?
2. Восемь студентов выбирают себе спецкурсы на семестр из списка, состоящего из четырех спецкурсов. Сколькими способами студенты могут записаться на эти спецкурсы так, чтобы каждый студент записался хотя бы на один спецкурс?

Основные задачи(мин. число оформленных задач 5)

1. Предположим теперь, что в предыдущей задаче(см. выше) мы дополнительно требуем, чтобы на любой спецкурс записался хотя бы один студент. Сколько существует способов это сделать?
2. Квадрат разделён на 16 одинаковых квадратов. Сколькими способами можно раскрасить эти квадраты в белый, чёрный, красный и синий цвета так, чтобы в каждом горизонтальном и каждом вертикальном ряду были все четыре цвета?
3. Используя формулу суммирования по верхнему индексу, получить замкнутые выражения для сумм вида

$$\sum_{i=0}^k i, \quad \sum_{i=0}^k i^2, \quad \sum_{i=0}^k i^3.$$

4. Рассмотрим решетку  $m \times n$  на плоскости  $Z^2$ . Путем Деланной называется путь, соединяющий точку  $(0, 0)$  с точкой  $(m, n)$  и состоящий из вертикальных, горизонтальных и диагональных отрезков. Количество  $D_{m,n}$  таких путей называется числами Деланной. Доказать, что в общем случае количество  $D_{m,n}$  всех таких путей для заданных  $m$  и  $n$  рассчитывается по формуле

$$D_{m,n} = \sum_k \binom{m}{k} \cdot \binom{m+n-k}{m}.$$

5. Доказать комбинаторно следующее тождество:

$$\binom{n+1}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{n}{k-i}.$$

С его помощью доказать справедливость равенства

$$\binom{n+k}{n+1} = \sum_{i=0}^k \binom{n+k-i-1}{n}.$$

6. Доказать обобщенное правило суммы для произвольного количества  $n$  множеств:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|. \quad (1)$$

7. В игре нарды 15 белых и 15 черных шашек стоят на 24 полях так, что каждое поле либо пустое, либо занято несколькими белыми шашками, либо занято несколькими черными шашками. Сколькими способами можно так расставить шашки на доске?

8. Рассмотрим все пятизначные положительные числа, в которых на третьей позиции стоит девятка. Сколько таких чисел делится на три? А если в пятизначных числах присутствует хотя бы одна девятка, и позиции, на которых она присутствует, нам не важны?