21 сентября 2017

Количество баллов на зачет: **8.5**

1. *(1.5 балла)* Доказать формулы обращения

$$f_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} g_i \;\Leftrightarrow\; g_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f_i, \quad k \geq 0$$

2. *(1.5 балла)* Найти рекуррентную формулу для вычисления чисел $F(n)$, введенных на занятии.

3. *(1.5 балла)* Доказать комбинаторно следующую формулу для чисел Стирлинга $S(n, 3)$:

$$S(n,3) = \frac{3^n - 3(2^n - 2) - 3}{6}.$$

4. *(1.5 балла)* Доказать, что числа Стирлинга $S(n, n-2)$ рассчитываются по формуле

$$S(n, n-2) = \frac{n(n-1)(n-2)(3n-5)}{24}$$

5. *(1.5 балла)* Доказать, что для всех $n > 2$ числа Белла $B(n) < n!$.

6. *(1 балл)* Сколькими способами можно расставить 20 различных книг по пяти различимым полкам при условии, что каждая полка может вместить все эти двадцать книг?

7. *(2 балла)* Предположим, что нам нужно разместить r натуральных чисел $1, 2, \ldots, r$ и $n-r$ нулей, $r < n$, в циклическом порядке так, чтобы при движении по часовой стрелке последовательность натуральных чисел всегда была бы возрастающей, и так, чтобы никакие два последовательно идущих натуральных числа i, $i+1$, не шли бы друг за другом (включая пару $(r, 1)$). Например, при $n > 2$ и $r = 1$ мы можем на любую из n позиций поставить единицу, а оставшиеся позиции заполнить нулями. Так как все такие размещения переходят в себя при вращениях по часовой стрелке, то всего имеется ровно одно подобное размещение при любом $n > 2$. В случае $r = 2$, $n = 4$ у нас имеется единственное с точностью до циклического сдвига устраивающее нас размещение $(1, 0, 2, 0)$, а в случае $r = 2$ и $n = 5$ таких размещений в точности два — $(1, 0, 2, 0, 0)$ и $(1, 0, 0, 2, 0)$. Подсчитать количество описанных размещений при произвольных значениях параметров n и r.

8. *(1 балл)* Сколько существует булевых функций n аргументов?

9. *(2 балла)* Говорят, что булева функция $f(x_1, ..., x_n)$ зависит от своего аргумента x_i, если можно подобрать такие значения b_j для других аргументов, что

$$f(b_1, ..., b_{i-1}, 0, b_{i+1}, ..., b_n) \neq f(b_1, ..., b_{i-1}, 1, b_{i+1}, ..., b_n).$$

Сколько булевых функций зависят от всех своих n аргументов? Ответ можно дать в виде суммы.

10. *(2 балла)* Доказать, что количество разбиений n-элементного множества, при котором ни в одном блоке не содержится пара последовательно идущих чисел, описывается числом Белла $B(n-1)$.