16 ноября 2017

1. Пусть G есть k-связный граф, диаметр которого равен d. Доказать, что количество n вершин в таком графе больше или равно $k(d-1)+2$. Для любого $k \geq 1$ и $d \geq 2$ построить k-связный граф, в котором это неравенство превращается в равенство.

2. Чему равно максимальное количество рёберно непересекающихся простых путей, соединяющих любую пару вершин в полном графе K_n?

3. Возьмем некоторую сеть из n вершин. Изменится ли величина максимального потока в ней, если добавить к каждой вершине (кроме стока и истока) петлю с пропускной способностью один? А если изменять ориентацию всех ребер на противоположную (и, соответственно, поменять местами сток и исток)? А если одновременно?

4. Для сети, изображенной на рис.1, определить минимальный реберный разрез, а также предъявить максимальный поток в этой сети.

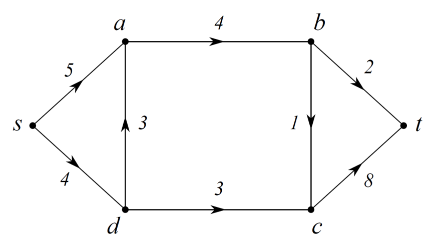

Рис. 1

5. Как использовать алгоритм Форда-Фалкерсона для сети, в которой имеется несколько источников и/или стоков? Проиллюстрировать ответ на примере сети, показанной на рис.2. Определить для этой сети минимальный разрез и соответствующий ему максимальный поток.

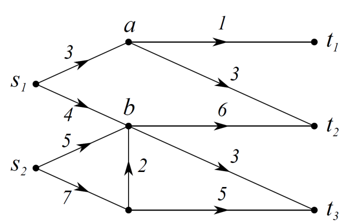

Рис. 2

6. С помощью алгоритма, использованного при доказательстве теоремы Форда-Фалкерсона, доказать, что в случае целочисленных значений пропускных способностей ребер существует максимальный поток в сети, причем величина этого потока, равно как и значения потока на каждом из ребер, будут целочисленными. Показать, что любой такой максимальный поток можно разбить на потоки, состоящие из простых путей из s в t, величина каждого из которых равна единице. Модифицировать доказательство существования максимального потока в сети для случая рациональных значений пропускных способностей ребер сети.

7. С помощью теоремы Форда-Фалкерсона доказать рёберную теорему Менгера для неориентированных графов.

8. Доказать для неориентированных графов реберную теорему Менгера с помощью вершинной теоремы Менгера.