

## Занятие 5

1. Рота из  $n$  солдат выстроена в шеренгу. Командир разбивает шеренгу в произвольном количестве мест, создавая тем самым несколько отрядов. После этого, часть отрядов он отправляет на дежурство. Сосчитать количество способов совершить такие комбинаторные действия *с использованием производящих функций*.
2. Придумать комбинаторное доказательство для результата, полученного при решении предыдущего упражнения.
3. Уравнение на производящую функцию  $f(z)$ , описывающую числа Каталана, можно переписать следующим образом:

$$f(z) = \frac{1}{1 - z \cdot f(z)}.$$

Дать комбинаторную интерпретацию этого уравнения с точки зрения композиции обыкновенных производящих функций.

4. На теории обсуждалось, что производящая функция количества способов наклеить марки  $\{4, 6, 10\}$  на бандероль — это

$$\phi(z) = \phi_4(z) \cdot \phi_6(z) \cdot \phi_{10}(z) = \frac{1}{(1 - z^4)(1 - z^6)(1 - z^{10})}.$$

Вывести рекуррентное соотношение на количество для  $h(n)$ . Дать комбинаторную интерпретацию этого соотношения с помощью принципа включения — исключения.

5. Доказать, что один рубль можно разменять монетами в две и пять копеек большим количеством способов, чем монетами достоинством в три и пять копеек.
6. В кошельке лежат три монеты по 2 копейки и две монеты по 3 копейки. Сколькими способами можно уплатить с помощью этих монет сумму в 8 копеек? А если все монеты в кошельке различимы, например, все они — различных годов выпуска?
7. Сколько существует способов выбора 20 объектов из множества объектов пяти типов при условии, что количество объектов первого типа кратно пяти, второго — трем, объектов третьего типа следует выбирать не более четырех, четвертого — не менее трех, пятого — не более двух?