(10). Комбинаторика перестановок.

1. Снова вернемся к композиционной ~~экспоненциальной~~ формуле.

1) Напомним, что если мы в композиц. ф-ле возьмем $a_n = b_n = 1$, $n \geq 1$; $a_0 = 0$, $b_0 = 1$, то мы получим числа Белла B_n – кол-во способов разбить n-элтное мн-во всеми возможными способами на блоки (непустые попарно непересекающиеся неупорядоченные подмн-ва, объединение кот. дает нам все n-элтное мн-во). Если же мы в кач-ве b_k возьмем t^k, то мы в разложении функции $H(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} t^k \right) \frac{x^n}{n!}$ в кач-ве коэф-тов при $t^k\, x^n/n!$ получим т.н. числа Стирлинга $2^{го}$ рода – кол-во способов разбить n-элтное мн-во ровно на k блоков. Наконец, если мы в кач-ве коэф-тов $a_n = x_n$ – возьмем x_n, то мы в разложении $H(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} t^k B_{n,k}(x_1, \ldots, x_{n-k+1}) \right) \frac{x^n}{n!}$ получим в кач-ве коэф-тов при $t^k\, x^n/n!$ т.н. полиномы Белла

$$B_{n,k}(x_1, \ldots, x_{n-k+1}) = \sum_{\substack{k_1 + \ldots + k_{n-k+1} = k \\ 1k_1 + \ldots + (n-k+1)k_{n-k+1} = n}} \frac{n!}{k_1! \ldots k_{n-k+1}!} \left(\frac{x_1}{1!}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{x_{n-k+1}}{(n-k+1)!}\right)^{k_{n-k+1}},$$

коэф-ты при $x_1^{k_1} \ldots x_{n-k+1}^{k_{n-k+1}}$ которых дают нам кол-во способов разбить n-элтное мн-во ~~на~~ ровно на k блоков, таких, что в разбиении присутствуют:

- ровно k_1 блок мощности 1 (т.е. с кол-вом элтов в нем, равным 1), ...
- ...
- ровно k_{n-k+1} блок мощности $n-k+1$

2) Теперь предположим, что мы хотим не просто разбить n-мн-во на блоки, а (хотим) разбить его на блоки, а затем циклически упорядочить все эти в каждом блоке разбиения. (Посмотрим, что будет в этом случае) а) Мы знаем, что $\exists$

$$a_n = (n-1)!,\ n=1,2,\dots,\ a_0=0,$$

способов циклически упорядочить n-элементное мн-во.
Тогда, взяв в композиционной ф-ле $b_n=1$, $n=0,1,2,\dots$, и $a_n=(n-1)!$, $n=1,2,\dots$; $a_0=0$, мы получим

$$C(x) = c_0 + c_1\frac{x^1}{1!} + c_2\frac{x^2}{2!}+\dots = e^{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\dots} = e^{\ln\frac{1}{1-x}}$$

• Еще раз: если $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\dots+x^n+\dots$, то, по опр-ию $\int$-ования формальных степенных рядов,

$$\int \frac{1}{1-x} \overset{def}{=} x + \frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\dots+\frac{x^n}{n}+\dots$$

Но: $\int_0^x \frac{dt}{1-t} = \ln\frac{1}{1-x}$ • $\left(\ln\frac{1}{1-x}\right)' = -\left(\ln(1-x)\right)' = -\frac{1}{1-x}(-1) = \frac{1}{1-x}$ •

$$\Rightarrow \ln\frac{1}{1-x} = x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\dots+\frac{x^n}{n}+\dots$$ •

Но тогда $C(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + 1!\frac{x^1}{1!} + 2!\frac{x^2}{2!}+\dots+n!\frac{x^n}{n!}+\dots \Rightarrow$

$\Rightarrow$ имеем $n!$ способов разбить всеми возможными способами n-элементное мн-во на блоки, а затем циклически упорядочить эти в каждом блоке.

б) Но: мы знаем, что $n!$ - это кол-во всех возможных перестановок n-элементного мн-ва. Следовательно, мы (таким способом) сосчитали кол-во всех перестановок n-элементного мн-ва. Почему это так?

• 1. Ну действительно, $\forall$ перестановка есть, по опр-ию, непо-

И количество всех таких различных отображений есть $n!$ штук.

~~2. Но: мы знаем, что $\forall$ перестановку можно записать в виде~~

2. Далее, мы знаем, что на мн-ве S_n таких перестановок мы можем ввести бинарную операцию — композицию этих перестановок. Например, если

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ то}$$

$$\sigma \circ \tau \overset{def}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad \tau \circ \sigma \overset{def}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

И мы знаем, что мн-во всех перестановок с введённой на нём операцией композиции образует (некоммутативную) группу S_n.

3. Наконец, мы знаем, что $\forall$ перестановку мы можем представить (записать) в виде произв. более простых перестановок — т.н. циклов. Например

$$\sigma = (1\,2\,3\,4) = (2\,3\,4\,1) = (3\,4\,1\,2) = (4\,1\,2\,3)$$

$$\tau = (1\,4)(2\,3) = (2\,3)(1\,4) = (4\,1)(2\,3) = (4\,1)(3\,2) = \ldots$$

А что же это означает? А это и означает, что мы, по сути, разбиваем n-элтное мн-во на блоки (непустые попарно непересекающиеся неупорядоченные подмн-ва, объединение кот. дает нам все n-мн-во), а затем задаем циклическую структуру в $\forall$ блоке (т.е. циклически упорядочиваем элты в блоке) $\Rightarrow$ (говорим, что за чем идет в $\forall$ блоке)

$\Rightarrow n!$ — кол-во всех перестановок — и есть кол-во ~~способов~~ всех возможных способов совершить указанные действия.

в) Это, все, конечно же, замечательно, но: мы этот результат получили ранее из других, совершенно элементарных соображений, и использование композиционной ф-лы для получения такого рез-та выглядит довольно смешно. Но: сделаем теперь следующий шаг - а именно, выберем так

$$a_n = (n-1)!, \quad b_k = t^k.$$

Тогда, согласно общей теории, коэф-ты при $t^k x^n/n!$ в разложении производящей функции

$$\overline{\mathbb{C}}(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k}\right] t^k\right)\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} c(n,k)\, t^k\right)\frac{x^n}{n!}$$

с малым

дадут нам кол-во способов разбить n-элементное мн-во ровно на k блоков, а затем циклически упорядочить эл-ты в $\forall$ блоке. На языке перестановок это есть кол-во перестановок, имеющих ровно k циклов!

И называются эти числа $\left[{n \atop k}\right] = c(n,k)$ числами Стирлинга 1-го рода. Поговорим об этих числах поподробнее.

2. Числа Стирлинга 1-го рода.

1) Во-первых, из композиционной ф-лы мгновенно получается производящая ф-ция для этих чисел:

$$\overline{\mathbb{C}}(x,t) = e^{t\cdot \ln\frac{1}{1-x}} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^t = \frac{1}{(1-x)^t}.$$

Имея эту производящую ф-цию, мы можем получать огромное кол-во св-в чисел Ст. 1-го рода.

2) В частности, мы можем вывести

шение для этих чисел.

а) Прежде чем это делать, установим ~~основные~~ простейшие факты об этих числах, кот. потом послужат нам граничными условиями ~~для~~ для наших рекурр-соотношений:

– Очевидно, что $C(0,0)=1$ – по опр-ию ~~∃ один способ~~

– Далее, ясно, что $C(n,0)=0, n>0$ – нельзя непустое множ-во на 0 блоков разбить

– Далее, очевидно, что $C(n,n)=1$ – это тождественная перестановка (все эти остаются на своем месте) (образуют одноэлементные циклы)

– Наконец, понятно, что $C(n,k)=0 \quad \forall k>n$.

б) Теперь: $\bar{\bar{C}}(x,t)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} c(n,k)t^k\right)\frac{x^n}{n!}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n(t)\frac{x^n}{n!}$;

C малая

Продиффуем это рав-во по x:

$$\frac{\partial \bar{\bar{C}}}{\partial x}=\sum_{n=1}^{+\infty} c_n(t)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+1}(t)\frac{x^n}{n!}$$

С другой стороны,

$$\bar{\bar{C}}(x,t)=\frac{1}{(1-x)^t} \Rightarrow \frac{\partial \bar{\bar{C}}}{\partial x}=\frac{t}{(1-x)^{t+1}}=\frac{t}{(1-x)}\bar{\bar{C}}(x,t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-x)\frac{\partial \bar{\bar{C}}}{\partial x}=t\cdot\bar{\bar{C}}(x,t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+1}(t)\frac{x^n}{n!}=t\cdot\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(t)\frac{x^n}{n!} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+1}(t)\frac{x^n}{n!}=\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\cdot c_{n+1}(t)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}_{=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n\cdot c_n(t)\frac{x^n}{n!}}+t\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(t)\frac{x^n}{n!}$$

$$\Rightarrow (*)\quad \boxed{c_{n+1}(t)=n\cdot c_n(t)+t\cdot c_n(t)}, \quad n=0,1,2\ldots$$

Так, $c_0(t)=\sum\limits_{k=0}^{0} c(0,k)t^k=c_0(0,0)=1$;

$c_1(t)=0\cdot 1+t\cdot 1=t$;

$c_2(t)=1\cdot t+t\cdot t=t+t^2$

- - - - - - - - -

в) Получим из (*) рекурр. соотнош. на числа $C(n,k)$:

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n+1} c(n+1,k)t^k} = n\cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{n} c(n,k)t^k} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} c(n,k)t^{k+1}}, \quad n=0,1,\ldots$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} C(n+1,k)t^k = n\cdot \sum_{k=1}^{n+1} C(n,k)t^k + \sum_{k=1}^{n+1} C(n,k-1)t^k \implies$$

по свойствам чисел $C(n,k)$

$$\implies \boxed{C(n+1,k) = n\cdot C(n,k) + C(n,k-1), \quad k=1,2,\ldots,n+1, \quad n=0,1,2,\ldots}$$

$+$ $C(0,0)=1$; $C(n,0)=0$ $\forall n=1,2,\ldots$; $C(n,k)=0$ $\forall k>n$

3) Давайте получим это же рекурр. соотношение из чисто комбинаторных соображений.

а) Разобьем все множ-во перестановок $(n+1)$-элементного множ-ва, содержащих k циклов, на 2 блока:

- в 1й блок мы поместим перестановки, в кот. элт $(n+1)$ содержится в цикле длины 1;
- во 2й блок мы поместим перестановки, в кот. элт $(n+1)$ содержится в циклах длины >1.

б) Очевидно, что в 1м блоке содержится $C(n,k-1)$ перестановок.

в) Во 2м блоке: содержатся все перестановки, полученные добавлением $(n+1)$го элта в один из k циклов перестановки n-элтного множ-ва, содержащего ровно k циклов. Всего n-элтных перестановок, содержащих ровно k циклов, $= C(n,k)$. Но: для $\forall$ такой перестановки: она содержала k циклов длины $n_1, n_2, \ldots, n_k$, причем $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$

(n_i могут быть повторяющимися числами, например $k=5$: $1+1+1+2+2=7$)

Осталось заметить, что в i цикле длины n_i я элемент $(n+1)$ могу вставить ровно n_i различными способами $\Rightarrow$ общее число способов вставить элт $(n+1)$ в перестановку n-элтного мн-ва, содержащего ровно k циклов, ровно

$$n_1+\dots+n_k=n \Rightarrow \dots$$

есть хоровод из n людей $n=4$

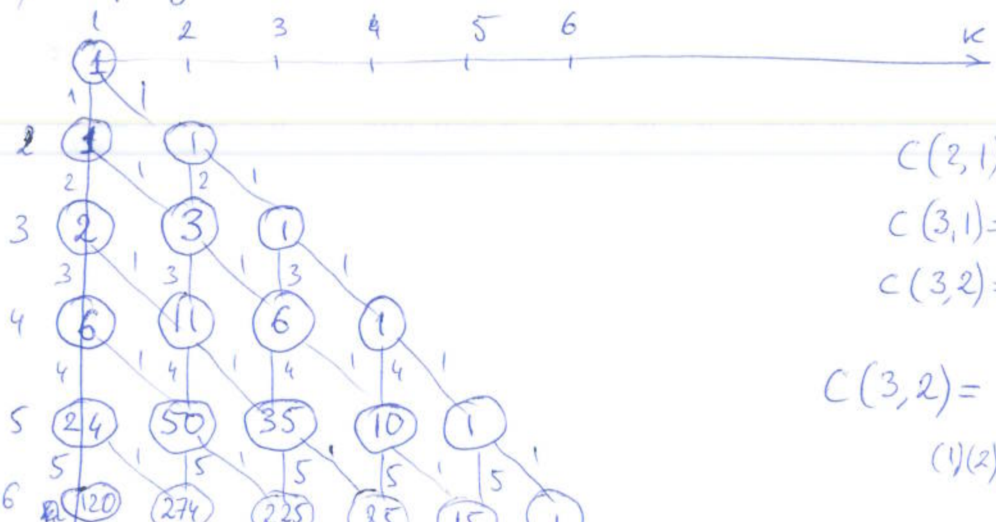
$\Rightarrow \exists\ n=4$ способа вставить сюда число $n+1=5$

4) Приведем некоторые примеры и построим Δ-к на пл-ти (n,k) для этих чисел:

а) Очевидно, $C(n,n)=1$: это перестановки вида $(1)(2)\dots(n)$, т.е. просто тождественная перестановка.

б) Далее, $C(n,1)=(n-1)!$ – кол-во способов циклически упорядочить n-элтное мн-во.

в) Треугольник:



$C(2,1)=1:\ (12)$; $C(2,2)=1:(1)(2)$

$C(3,1)=2:\ (123);(132);$

$C(3,2)=3:\ (12);(13);(23)$

$$C(3,2)=2\cdot\underbrace{C(2,2)}_{(1)(2)}+\underbrace{C(2,1)}_{(12)(3)}$$

$(1)(2)\rightarrow(13)(2)$, $(1)(23)$

5) Наконец, с пом. производящей функции

$$\bar{\bar{C}}(x,t)=\frac{1}{(1-x)^t}$$

с малое

можно получить и еще одно, чрезвычайно полезное соотношение для чисел $c(n,k)=\left[{n \atop k}\right]$.

а) Именно, $\bar{\bar{C}}(x,t)=\sum^{+\infty} c_n(t)\frac{x^n}{n!}=\frac{1}{(1-x)^t}$, Получим явное аналитическое выражение для полиномов $C_n(t)$. Для этого воспользуемся, например, формулой бинома Ньютона

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\alpha)_n}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

У нас:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}C_n(t)\frac{x^n}{n!}=\frac{1}{(1-x)^t}=\big(1+(-x)\big)^{-t}=$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\overbrace{(-t)\cdot(-t-1)\cdot\ldots\cdot(-t-n+1)}^{n\text{ штук}}}{n!}\cdot(-1)^n\cdot x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t\cdot(t+1)\dots(t+n-1)}{n!}x^n$$

Сравнивая коэф-ты при $\frac{x^n}{n!}$ в левой и правой частях этого равва, получаем:

$$(**)\quad \boxed{C_n(t)=\sum_{k=0}^{n}c(n,k)t^k=t\cdot(t+1)\dots(t+n-1)=:(t)^{n}\equiv t^{\overline{n}}}$$

т.н. возрастающая факториальная ~~степень~~ числа. Т.о., числа Стирлинга $1^{го}$ рода - это коэф-ты в разложении возрастающего факториального числа $(t)^n$ по степеням t^k.

б) Теперь: числа $c(n,k)\equiv\left[{n \atop k}\right]$ иногда наз. числами Стирлинга $1^{го}$ рода без знака. Наряду с этими числами, вводят также т.н. числа Ст. $1^{го}$ рода со знаком

$$s(n,k):=(-1)^{n-k}c(n,k)\equiv(-1)^{k-n}c(n,k)$$

Зачем они нужны?

Заменим в равве $(**)$ $t\longmapsto(-t)$ $\Rightarrow$ получим:

$$C_n(-t)=\sum_{k=0}^{n}c(n,k)\cdot(-1)^k\cdot t^k=(-1)^n\cdot t\cdot(t-1)\cdot\ldots\cdot(t-n+1)\iff$$

$\iff$ | ~~домножим~~ домножим левую и правую часть на $(-1)^{n-2k}$ $\iff$

$$\iff(-1)^n C_n(-t)=\sum_{k=0}^{n}s(n,k)t^k=t\cdot(t-1)\dots(t-n+1)=:(t)_n\equiv t^{\underline{n}}$$

$\Rightarrow$ $s(n,k)$ - это коэф-ты в разложении убывающего факториального числа по степеням t^k

в) Наконец, вспомним, что числа Ст. 2-го рода появились в разложении вида

$$t^n = \sum_{k=0}^{n} (t)_k \cdot S(n,k)$$

$$k^n = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \hat{S}(n,i) = \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} \hat{S}(n,i) \Rightarrow$$

$$\cancel{k^n = \sum_{i=0}^{n} (k)_i S(n,i)}$$

$$\Rightarrow x^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{x}{i} \hat{S}(n,i) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x!}{i!(x-i)!} \hat{S}(n,i) = \sum_{i=0}^{n} (x)_i \hat{S}(n,i)$$

Сравнивая с форм.

$$(t)_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\, t^k,$$

видим, что числа $S(n,k)$ и $s(n,k)$ взаимно-обратны в следующем смысле:

$$\sum_{i=k}^{n} S(n,i) \cdot s(i,k) = \sum_{i=k}^{n} s(n,i)\, S(i,k) = \delta_{n,k} = \begin{cases} 1, & n=k \\ 0, & n \neq k. \end{cases}$$

$$(t)_n = \sum_{i=0}^{n} s(n,i)\, t^i = \sum_{i=0}^{n} s(n,i) \cdot \sum_{k=0}^{i} (t)_k\, S(i,k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left\{ \sum_{i=k}^{n} s(n,i) \cdot S(i,k) \right\} (t)_k \Rightarrow \ldots$$

г) С алгебраической т. зрения: у нас имеются два различных базиса в пр-ве функций:

- базис $1, t, t^2, t^3, \ldots, t^n, \ldots$ – степенной базис B_p
- базис $1, t, t(t-1), \ldots, (t)_n = t\cdot(t-1)\cdot\ldots\cdot(t-n+1)$ – т.н. факториальный базис B_f

Так вот, матрицы S и s, составленные из чисел Ст. 2-го и 1-го рода, являются матрицами перехода от одного базиса к другому:

$$B_f = s \cdot B_p; \quad B_p = S \cdot B_f; \quad s\,S = S\,s = E -$$

единичной матрице.

б) Итак, мы с пом. произв. функц. $C(x,t)$ изучили

3. Цикловой индикатор перестановки.

1) Вновь вернемся к композиционной ф-ле и снова, по аналогии с задачей разбиения n-элтного мн-ва, рассмотрим (3-й) случай – когда

$$b_k = t^k, \quad a_k = (n-1)! \cdot x_n$$

(Комбинаторный смысл: сначала $(n-1)!$ способами циклич. упорядочить n-элтное мн-во, а затем x_n способами раскрасить какое-то колеб. действие)

Тогда: совершенно аналогичные действия приведут нас к разложению вида

$$C(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} t^k \cdot C_{n,k}(x_1, \ldots, x_{n-k+1}) \right) \frac{x^n}{n!}, \text{ где}$$

$$C_{n,k}(x_1, \ldots, x_{n-k+1}) = \sum_{\substack{k_1 + \ldots + k_{n-k+1} = k \\ 1\cdot k_1 + \ldots + (n-k+1)\cdot k_{n-k+1} = n}} \frac{n!}{k_1! \ldots (n-k+1)!} \cdot \left(\frac{x_1}{1}\right)^{k_1} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{x_{n-k+1}}{(n-k+1)}\right)^{k_{n-k+1}}$$

полиномы, являющиеся цикловыми аналогами Полиномов Белла. Их комбинаторный смысл: коэф-ты при

$$x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_{n-k+1}^{k_{n-k+1}}$$

есть кол-во перестановок n-элтного мн-ва, имеющих ровно k циклов, в кот. имеются:

- k_1 циклов единичной длины
- k_2 циклов длины 2
- ...
- k_{n-k+1} циклов длины $n-k+1$.

т.е. кол-во перестановок заданного циклового класса $(k) \stackrel{def}{=} (k_1, \ldots, k_n)$ (т.е. кол-во перестановок, отвечающих заданному разбиению числа n)

---

2) На практике: чаще всего подобного рода подробное описание не требуется; точнее говоря, обычно за точным кол-вом k циклов следить не надо $\Rightarrow$ вводят т.н. дополненный цикловой индекс

$$\tilde{Z}_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=0}^{n} C_{n,k}(x_1, \ldots, x_{n-k+1}) = \sum_{\substack{p(n): \\ 1\cdot k_1 + \ldots + n\cdot k_n = n}} \frac{n!}{k_1! \ldots k_n!} \left(\frac{x_1}{1}\right)^{k_1} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{x_n}{n}\right)^{k_n}$$

Комбинат. смысл: коэф-т при $x_1, \ldots x_n$ = кол-во перестановок n-элтного мн-ва, имеющих ровно k_1 ...

и просто цикловой индекс

положим во всех ф-лах $t=1$.

Примеры: а) $\widetilde{Z}_1(x_1) = x_1 \longmapsto (1)$

б) $\widetilde{Z}_2(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2 \longmapsto (1)(2);\ (12)$

в) $\widetilde{Z}_3(x_1,x_2,x_3) = x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3 \longmapsto (1)(2)(3);\ (1,2);(13);(23);\ (132);(123)$

г) $\widetilde{Z}_4(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^4 + 6x_1^2x_2 + 3x_2^2 + 8x_1x_3 + 6x_4$

.....

3) Вопрос: а как вычислять эти цикловые индексы?
Ответ: Есть явные ф-ла, но: можно вновь, пользуясь производящей функцией, получить для них рекуррентные соотношения.

а) $$C(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \widetilde{Z}_n(x_1,\ldots,x_n)\frac{x^n}{n!} = e^{x_1x + x_2\frac{x^2}{2} + x_3\frac{x^3}{3} + \ldots + x_n\frac{x^n}{n} + \ldots}$$

Продиффуем обе части этого равва по x:

б) $$C'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\widetilde{Z}_n(x_1,\ldots,x_n)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\widetilde{Z}_{n+1}(x_1,\ldots,x_{n+1})\frac{x^n}{n!}$$

в) Справа: $C(x)\cdot\left[x_1 + x_2x + x_3x^2 + \ldots + x_nx^{n-1} + \ldots\right] =$

$$= \left[\widetilde{Z}_0 + \widetilde{Z}_1(x_1)\frac{x}{1!} + \widetilde{Z}_2(x_1,x_2)\frac{x^2}{2!} + \ldots + \widetilde{Z}_n(x_1,\ldots,x_n)\frac{x^n}{n!} + \ldots\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_2\cdot\frac{x}{1!} + \widetilde{x}_3\frac{x^2}{2!} + \ldots + \widetilde{x}_n\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots\right],$$ где $\boxed{\widetilde{x}_{k+1} = x_{k+1}\cdot k!}$

г) Перемножая стоящие справа экспоненц. произв. ф-ции, получим:

$$\widetilde{Z}_{n+1}(x_1,\ldots,x_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n}\widetilde{x}_{k+1}\binom{n}{k}\cdot\widetilde{Z}_{n-k}(x_1,\ldots,x_{n-k}) =$$

$$\boxed{= \sum_{k=0}^{n}(n)_k\cdot x_{k+1}\cdot\widetilde{Z}_{n-k}(x_1,\ldots,x_{n-k}) = \widetilde{Z}_{n+1}(x_1,\ldots,x_{n+1})}$$

д) Пример: $\widetilde{Z}_5 = x_1\widetilde{Z}_4 + 4x_2\widetilde{Z}_3 + 12x_3\widetilde{Z}_2 + 24x_4\widetilde{Z}_1 + 24x_5\underbrace{\widetilde{Z}_0}_{=1} =$

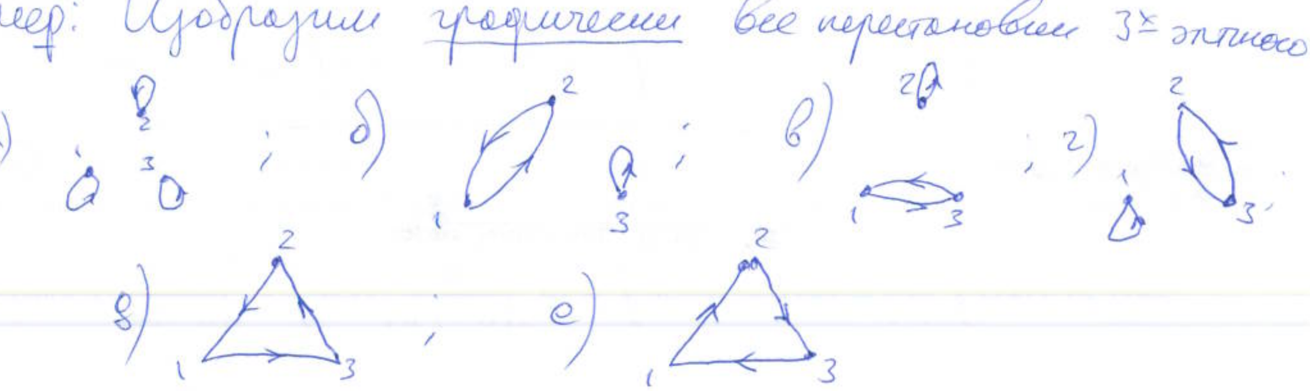
$= x_1(x_1^4 + 6x_1^2x_2 + 3x_2^2 + 8x_1x_3 + 6x_4) + 4x_2(x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3) + 12x_3(x_1^2 + x_2) + 24x_4x_1 + 24x_5$

$= x_1^5 + 10x_1^3x_2 + 15x_1x_2^2 + 20x_1^2x_3 + 20x_2x_3 + 30x_1x_4 + 24x_5$

4. Перестановки без единичных циклов.

1) С помощью цикловых индексов, а также с пом. произв. функц $C(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} t^k C_{n,k}(x_1,\dots,x_{n-k+1})\right)\frac{x^n}{n!}$ можно решать огромное кол-во комбинаторных задач связанных с перестановками n-элементного мн-ва. В кач-ве характерного примера рассмотрим задачу подсчёта всех перестановок, в кот. отсутствуют единичные циклы. (т.н. задача о беспорядках – ни один из эл-тов в рез-те действия перестановки не остается на своем месте).

2) Пример: Изобразим графически все перестановки 3-х элементного мн-ва:



Видно, что среди $3! = 6$ перестановок лишь $D_3 = 2$ перестановки не содержат единичных циклов.

3) Мы сразу будем рассматривать более общую задачу – найти кол-во $d(n,k)$ перестановок, не содержащих циклов единичной длины и состоящих ровно из k циклов длины ≥ 2. Совершенно очевидно, что этот случай отвечает следующим значениям $x_1,\dots,x_n$:

$x_1 = 0$ (запрещаем брать циклы длины 1)

$x_2 = \dots = x_k = \dots = 1$ (и берем $\forall$ циклы длины ≥ 2)

Тогда: $C_{n,k}(0,1,\dots,1) = d(n,k)$; а

$\mathcal{D}(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} d(n,k)t^k\right)\frac{x^n}{n!} = e^{t\cdot\left(0\cdot x + 1\cdot\frac{x^2}{2} + 1\cdot\frac{x^3}{3} + \dots\right)}$

$$= e^{t\cdot\left(\ln\frac{1}{1-x} - x\right)} = \boxed{\frac{e^{-tx}}{(1-x)^t} = d(x,t)} \iff$$

$$\iff \boxed{\bar{C}(x,t) = \frac{1}{(1-x)^t} = e^{tx}\cdot d(x,t)}$$

4) Последнее равво, связывающее производящую функцию $C(x,t)$ для всех ~~…~~ перестановок ~~…~~ с числом циклов $= k$, и производящую функцию $d(x,t)$ для всех перестановок с числом циклов, $= k$, длина кот. ≥ 2, имеет очевидный комбинаторный смысл с т. зрения теории экспоненц. произв. функций: а) Именно e^{tx} – это производящая функция, описывающая кол-во способов построить на k-элтном мн-ве ровно k циклов единичной длины:

$$e^{tx} = 1 + 1\cdot t\cdot\frac{x^1}{1!} + 1\cdot t^2\cdot\frac{x^2}{2!} + \dots + 1\cdot t^n\frac{x^n}{n!} + \dots$$

(смысл: взять мн-во из n эл-тов и представить его как прие n циклов единичной длины, т.е. единственным способом оставить все n эл-тов на своих местах; очевидно, я это могу сделать $b_n = 1$ числом способов).

б) Тогда: ~~…~~ кол-во $c(n,k) = \left[{n \atop k}\right]$ способов получить перестановку ~~…~~ n эл-тов, состоящую ровно из k циклов, = кол-ву способов совершить след. действие: взять n-элтное мн-во, разбить его на 2 блока $\binom{n}{i}$ числом способов, затем в 1-м блоке, состоящем из i эл-тов, $b_i = 1$ способом построить i циклов единичной длины, а во 2-м блоке построить $d(n-i,k-i)$ способами на $(n-i)$-элтном мн-ве $(k-i)$ циклов длины ≥ 2 $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\left[{n \atop k}\right] = c(n,k) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} d(n-i,k-i)} \iff \Big|\ \text{по ф-ле обращения}$$

$$\iff \boxed{d(n,k) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\left[{n-i \atop k-i}\right]}$$ – связь между числами Ст. (1-го рода)

в) Опр. Числа $d(n,k)$ наз. присоединенными числами Стирлинга 1-го рода.

г) Если представить производящие функции

$$\bar{\bar{C}}(x,t)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(t)\frac{x^n}{n!}, \quad d(x,t)=\sum_{n=0}^{+\infty} d_n(t)\frac{x^n}{n!}, \text{ то}$$

$$\bar{\bar{C}}(x,t)=e^{xt}\cdot d(x,t) \iff \boxed{c_n(t)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k\cdot d_{n-k}(t)} \iff$$

$$\iff \boxed{d_n(t)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k c_{n-k}(t)}$$

5) Зная производящую функцию $d(x,t)$, можно аналогично тому, как это было сделано для функции $\bar{C}(x,t)$, получить рекурр. соотнош. для $d_n(t)$ и $d(n,k)$.

а) $$d(x,t)=\frac{e^{-xt}}{(1-x)^t}; \quad \frac{\partial d}{\partial x}=-t\cdot d+\frac{t}{1-x}\cdot d=\frac{tx}{1-x}\cdot d(x,t) \iff$$

$$\iff \sum_{n=0}^{+\infty} d_{n+1}(t)\frac{x^n}{n!}=\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} d_{n+1}(t)\frac{x^{n+1}}{n!}}_{\sum_{n=0}^{+\infty} n\cdot d_n(t)\frac{x^n}{n!}}+\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} t\cdot d_n(t)\frac{x^{n+1}}{n!}}_{\sum_{n=0}^{+\infty} n\cdot t\cdot d_{n-1}(t)\frac{x^n}{n!}} \iff$$

$$\iff \boxed{d_{n+1}(t)=n\cdot d_n(t)+n\cdot t\cdot d_{n-1}(t)} \quad n=1,2,\dots; \; d_0=1;\; d_1=0.$$

б) Для чисел: $$d_n(t)=\sum_{k=0}^{n} d(n,k)t^k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{d(n+1,k)=n\cdot d(n,k)+n\cdot d(n-1,k-1)}$$

в) Треугольник:

	$k=1$	$k=2$	$k=3$	4	5	6
$n=1$	0					
2	1	0				
3	2	0	0			
4	6	3	0	0		
5	24	20	0	0	0	
6	120	130	15	0	0	0

б) Теперь, как частный случай, мы мгновенно решим задачу о беспорядках - задачу о подсчете кол-ва D_n перестановок, не имеющих единичных циклов.

а) Очевидно, что $D_n = \sum_{k=0}^{n} d(n,k) = d_n(1)$, где $d_n(t) = \sum_{k=0}^{n} d(n,k) t^k$

$\Rightarrow$

(1): Рекуррентное соотношение:

$$\boxed{D_{n+1} = n \cdot \left[D_n + D_{n-1} \right]_{,\, n \geq 1} \; D_0 = 1, \; D_1 = 0}$$

(2): Производящая ф-ция:

$$\boxed{D(x) = d(x, 1) = \frac{e^{-x}}{1-x}}$$

(3): Связь с производящей ф-цией $C(x)$ для $\frac{1}{1-x}$ числа $C_n = n!$ всех перестановок:

$$\boxed{D(x) \cdot e^{x} = \frac{1}{1-x} = C(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot D_{n-k}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{D_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)!} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{D_n = n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!} \right] \approx \frac{n!}{e} =: n¡} -$$

т.н. субфакториалы. (Кнут и Ко)

б) Очевидно, что субфакториалы „похожи" на обычные факториалы так же, как присоединенные числа Ст. 1-го рода - на обычные числа Ст. 1-го рода.

в) Числа D_n встречаются в огромном количестве школьных олимпиадных задач по комбинаторике

Исторически они впервые появились в 1708г.: P. Montmort (П. Монмор) рассматривал 2 колоды карт, по n штук в колоде, и поставил задачу о подсчете расходов ~~такие колоды, такие, чтобы такие, что~~ карт во 2й колоде, ~~такие, что~~ при которых они бы не повторились с картами 1й колоды при смещении обеих колод на ∀, но одинаковое, количество карт (т.н. задача о смещениях - displacements)

г) Двойственная ей задача: если n писем (шлем) случайным образом (подбросать и послать) разложить в n различных (n адресам) конвертов, то какова верть, что ~~какое-то~~ хотя бы одно письмо попадет в свой конверт? Очевидно, эта верть =

$$= 1 - \frac{D_n}{n!} \approx 1 - 1/e \approx 0{,}63212$$

и очень слабо зависит от числа n.

Здесь же: на сеансе телепатии: это - верть того, что после n испытаний фокусник правильно угадает хотя бы одну карту

д) Еще из этой же серии: ∀ перестановку можно записать в виде матрицы, состоящей из 0 и 1, такой, что в ∀ строке и в ∀ столбце стоит только одна 1, а остальные цифры в этих строке и столбце - нули. Тогда: D_n подсчитывают колво матриц с нулями на главной диагонали. И это - самый главный и самый простой пример задачи о перестановках с ограничениями на переставляемые позиции.

е) Еще примеры: у преподавателя обучаются n студен-

студентов обменяться ответами и проверить тесты так, чтобы никто не проверял свою работу ⇒ ⇒ имеется D_n способов это сделать.

ж) Еще: Студент сдает экзамен, в процессе которого он на 10 разных вопросов должен дать один из 10 разных ответов. Сколькими способами он может дать все неправильные ответы? D_{10}. А хотя бы один правильный? $10! - D_{10} \cong 10!(1 - 1/e)$.

7) Очевидно обобщение последней задачи: а сколько ∃ способов у студента ответить правильно ровно на k вопросов? Это - задача о поиске колва $D(n,k)$ перестановок, в кот. ровно k элементов останутся на своих местах, а $(n-k)$ эл-тов обязательно меняют свое положение. Как находить эти числа?

а) Ответ практически очевиден:

$$D(n,k) = \binom{n}{k} \cdot D_{n-k}.$$

Действительно, $\binom{n}{k}$ способами я выбираю эл-ты, кот. должны оставаться неподвижными, а затем D_{n-k} способами я „перемешиваю" оставшиеся $(n-k)$ эл-тов.

б) Вспоминая, что $D_{n-k} = (n-k)!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)}{(n-k)!}\right)$, можно получить явную ф-лу для чисел

$$\boxed{D(n,k) = \frac{n!}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}}$$

в) Наконец, очевидно, что

$$\boxed{n! = \sum_{k=0}^{n} D(n,k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k}}$$ - вновь получили ф-лу, связывающую $n!$ и D_n

г) А как получить производящую функцию для этих чисел $D(n,k)$? Прямо — сложно $\Rightarrow$ воспользуемся след. хитрым приемом, обобщение кот. позволяет сформулировать принцип <u>включения-исключения</u> в терминах композиционной ф-ии (см. generatingfunctionology):

Рассмотрим производящую функцию

$$P(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} P(n,k)\, t^k \right) \frac{x^n}{n!}$$

для чисел $P(n,k)$, = кол-ву всех перестановок, имеющих не менее k <u>единичных</u> циклов. Очевидно,

$$P(x,t) = \frac{e^{xt}}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k \cdot (n-k)! \right] \frac{x^n}{n!}$$

т.к. для того, чтобы построить <u>$\forall$</u> такую перестановку нужно $\binom{n}{k}$ способами выбрать k эл-тов в $1^{й}$ блок, 1-им способом (это — ф-ия e^{xt}) создать в 1-м блоке размером k ровно k циклов единичной длины, а во 2-м блоке $(n-k)!$ способами создать всевозможные перестановки $(n-k)$ эл-тов.

С другой же стороны,

$$P(x,t) = e^x \cdot D(x,t):$$

я разбиваю $\binom{n}{k}$ способами n-мн-во на 2 блока, в 1-м блоке (размером k) не делаю ничего, а во $2^{м}$ блоке (размером $n-k$) я $D_{n-k}(t) = \sum_{i=0}^{n-k} D(n-k,i)\, t^i$ способами произвожу след. действие:

- выбираю $i=0$ циклов единичной длины, а на оставшемся мн-ве из $(n-k)$ эл-тов $\underline{D(n-k,0)}$ числом способов „перемешиваю" $(n-k)$ эл-тов так, что ни $= D_{n-k}$ один из них не остается на своем месте;
- выбираю $i=1$ циклов единичной длины, а оставшиеся $n-k-1$ эл-т перемешиваю: $D(n-k,1)$ числом способов

- - - - -

Т... $D(x,t) = \frac{e^{xt}}{1-x}\, e^{-x}$

д) Все можно получить значительно более просто из основного соотношения для чисел

$$D(n,k) = \binom{n}{k} D_{n-k}. \qquad (*)$$

Действительно, домножим это урие на t^k и проΣуем по k от 0 до n $\Rightarrow$ получим

$$\sum_{k=0}^{n} D(n,k) t^k =: D_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k D_{n-k}.$$

Рассмотрим теперь правую часть. Видно, что то, что стоит в правой части - это про-е пары эксп. произв. функций:

$$D(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} D_n \frac{x^n}{n!} \quad \text{и} \quad C_1(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \frac{x^n}{n!}$$

Но: знаем, что

$$D(x) = \frac{e^{-x}}{1-x} \; ; \qquad C_1(x,t) = e^{tx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{D(x,t) = D(x) e^{tx} = \frac{e^{-x}}{1-x} \cdot e^{tx}}$$

И комбинаторный смысл этой ф-ии - абсолютно аналогичен комбинаторному смыслу ф-ии $(*)$, просто переформулированный на языке произв. функций, а именно:

- слева: $D_n(t) = \sum_{k=0}^{n} D(n,k) t^k =$

= я беру n-элтное мн-во, всеми возможными способами разбиваю его на 2 блока - размерами k и $(n-k)$; затем в 1-м блоке не делаю ничего, а во 2-м блоке перемешиваю его элты $D(n,k)$ способами

- справа: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k D_{n-k} =$

= я беру n-элтное мн-во, всеми возм. спос. разбиваю его на блоки, в 1-м я на k-элтном мн-ве строю k циклов длины 1, а на 2-м - D_{n-k} способами „перемешиваю" элты $\Rightarrow$

5. Посмотрим на еще несколько интересных применений композиционной ф-лы, записанной применительно к перестановке n-элтного мн-ва

1) Еще раз: по-сути, речь идет вот о чем: мы берем n-элтное мн-во, всеми возможными способами разбиваем это мн-во на k циклов, далее $\tilde{a}_{i_m}$ способами совершаем некоторое комбинаторное действие на этом цикле, ~~~~ длины i_m, $m=1,2,\dots,k$; а затем b_k способами совершаем комбинаторное действие над этими k циклами перестановки ⇒

⇒ результат: $H(x) = G(F(x))$, ~~где~~ $= c_0 + c_1\frac{x}{1!} + \dots + c_n\frac{x^n}{n!}$

$$G(x) = b_0 + b_1 x + b_2\frac{x^2}{2!} + \dots + b_k\frac{x^k}{k!} + \dots,$$

$$F(x) = 0 + a_1 x + a_2\frac{x^2}{2!} + \dots + a_n\frac{x^n}{n!} + \dots = 0 + \tilde{a}_1 x + \tilde{a}_2\frac{x^2}{2} + \dots + \tilde{a}_n\frac{x^n}{n} + \dots,$$

где $\tilde{a}_n = a_n/(n-1)!$, $\Leftrightarrow a_n = \tilde{a}_n\cdot(n-1)!$,

при этом

$$c_n = \sum_{\substack{\text{по } \forall \text{ разбиению} \\ \pi = \{B_1,\dots,B_k\}\in\Pi(S)}} \left(\tilde{a}_{\#B_1}\cdot(\#B_1-1)!\right)\dots\left(\tilde{a}_{\#B_k}\cdot(\#B_k-1)!\right) b_k =$$

$$= \sum_{\substack{\text{по } \forall \text{ перестановке} \\ \pi\in\mathfrak{S}(S) \\ n\text{-элтного мн-ва } S}} \tilde{a}_{\#C_1}\dots\tilde{a}_{\#C_k}\, b_k,$$

где $C_1,\dots,C_k$ – k циклов в разложении перестановки π на непересекающиеся циклы

2) Пример: в кач-ве примера рассмотрим к примеру, все такие перестановки, ~~~~ для которых

$\pi^2 = id$ – тождественная перестановка.

Очевидно, что все такие перестановки могут состоять из циклов, длины d которых делят 2: Поэтому мы, чтобы получить все такие перестановки, должны в нашей фле положить

$$a_d = 0, \text{ если } d \nmid r,$$
$$a_d = 1, \text{ если } d \mid r.$$

Смысл: мы берём ~~несвободно~~ делим перестановку на k циклов длинами $i_1, \dots, i_k$; и, если $i_m \nmid d$, то положим $a_{i_m} = 0$ (т.е. такой цикл не берём), и, если $i_m \mid d$, то положим $a_{i_m} = 1$ (т.е. выбираем такой цикл) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists\ C^{(r)}(x) = c_0^{(r)} + c_1^{(r)} x + c_2^{(r)} \frac{x^2}{2!} + \dots + c_n^{(r)} \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

где $c_n^{(r)}$ – колво ~~таких циклов~~ перестановок: $\pi^r = id$; тогда

$$\boxed{C^{(r)}(x) = e^{\sum_{d=1}^{+\infty} a_d \frac{x^d}{d!}} \Bigg|_{a_d = \begin{cases} 0, & d \nmid r \\ 1, & d \mid r \end{cases}} = e^{\sum_{d \mid r} a_d \frac{x^d}{d!}}}$$

---

3) В частности, колво инволюций, т.е. перестановок вида
$$\pi^2 = id,$$
определяется из соотношения
$$C^{(2)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n^{(2)} \frac{x^n}{n!} = e^{x + x^2/2}$$

Количество же инволюций без неподвижных точек (т.е. без циклов длины 1) определяется из соотношения
$$\tilde{C}^{(2)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{c}_n^{(2)} \frac{x^n}{n!} = e^{x^2/2}.$$

Далее, т.к. $e^{x^2/2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n + \dots$, то
$$\tilde{c}_n^{(2)} = \frac{1}{n!\,2^n} \cdot (2n)! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) = (2n-1)!!$$ (т.н. semi factorial

---

4) Далее, подсчитаем колво перестановок с циклами нечётной длины. Покажем, что производящая функция для числа таких перестановок равна
$$G_{odd}(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

а) Очевидно, нам надо сосчитать

$$G_{odd}(x) = e^{x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\dots} = e^{F_{odd}(x)}$$

б) Заметим, что

$$F'_{odd}(x) = 1 + x^2 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{odd}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\ln(1+x)$$

в) Следовательно,

$$G_{odd}(x) = e^{\left[\frac{1}{2}\ln\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\ln(1+x)\right]} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

---

5) Докажем, с использованием последнего рез-та, что кол-во перестановок длины $2n$, содержащих только неч. циклы =

$$= (1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1))^2 = ((2n-1)!!)^2,$$

а —//— $2n+1$, $= ((2n-1)!!)^2\cdot(2n+1)$.

а) Все, что нам нужно — это сосчитать коэф-ты при $\frac{x^n}{n!}$ у произв. ф-ции $G_{odd}(x)$. Для этого: домножим числитель и знаменатель на $\sqrt{1+x}$ $\Rightarrow$ получим:

$$G_{odd}(x) = \frac{(1+x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

б) Согласно бином. ф-ле,

$$(1-x^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\binom{-1/2}{n}x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\ldots(-\frac{(2n-1)}{2})}{n!}(-1)^n x^{2n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}x^{2n}$$

в) Тогда: домножая на $(1+x)$: от 1 — коэф-нт $g(2n) =$

$$= (2n)!\,\frac{(2n-1)!!}{n!\cdot 2^n} = ((2n-1)!!)^2;$$

от x — коэф-нт $g(2n+1) =$

$$= (2n+1)!\,\frac{(2n-1)!!}{n!\,2^n} = (2n+1)\cdot((2n-1)!!)^2$$