

Домашнее задание на 20.04

Задач на зачет: 4.

1. Доказать, что количество *полных* плоских корневых бинарных деревьев (т.е. деревьев, у которых любая вершина имеет либо ровно двух потомков, либо ни одного) с $(n+1)$ -м листом равно числу Каталана C_n .
2. Рассмотрим последовательность целых чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$, сумма которых равна 1. Докажите, что существует ровно один циклический сдвиг этой последовательности, такой, что все частичные суммы $a_1, a_1 + a_2, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_n$ строго положительны
3. Пользуясь предыдущей задачей, докажите, что числа Каталана удовлетворяют формуле $C_n = \binom{2n+1}{n} / (2n+1)$
4. Рассмотрим скобочные последовательности, состоящие из n открывающихся и $n-k$ закрывающихся скобок и такие, что после дописывания к ним справа k закрывающихся скобок они становятся правильными. Например, в случае $k=0$ мы получаем правильные скобочные последовательности. Подсчитать количество всех таких скобочных последовательностей.
5. Числа Деланной $D(m, n)$ описывают количество путей на плоскости из точки $(0, 0)$ в точку (m, n) , состоящих из шагов вида $(0, 1)$, $(1, 0)$ и $(1, 1)$. Доказать, что эти числа в случае $n \geq m$ рассчитываются по формуле

$$D(m, n) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n+m-k}{m}.$$

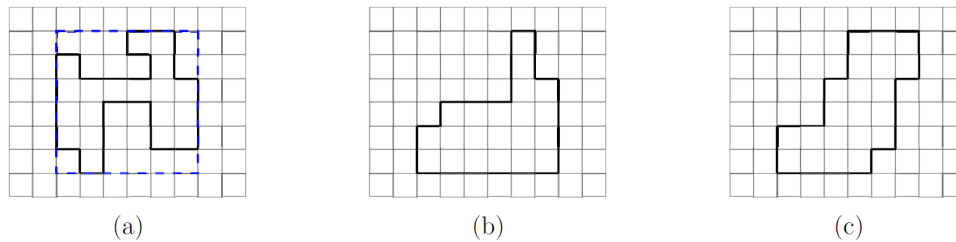


Рис. 1

6. Полимино называется область на клетчатой плоскости, ограниченная простой замкнутой ломаной, идущей по сторонам клеток (см.рис.1,а). Мы будем рассматривать так называемые выпуклые полимино, то есть полимино, периметр которого совпадает с периметром его минимального ограничивающего прямоугольника, то есть прямоугольника минимального периметра, содержащего полимино внутри себя (см. синюю пунктирную линию на рис.1). Так, полимино, показанный на рис.1,а, выпуклым не является. На рис.1,б показан выпуклый полимино.

Полимино называется ориентированным выпуклым полимино, если он содержит по меньшей мере один из углов своего минимального ограничивающего прямоугольника. Если он содержит оба нижних угла своего минимального ограничивающего прямоугольника, то полимино называется стековым (см.рис.1,б). Доказать, что количество стековых полимино с периметром $2n+2$ равно числу Фибоначчи F_{2n-2} .

7. Полимино называется параллелограммным, если его граница представляет собой объединение двух ломанных, идущих вправо и/или вверх из общего левого нижнего конца в общий правый верхний конец (см.рис.1,с). Доказать, что количество параллелограммных полимино с периметром $2n+2$ равно числу Каталана C_n .