Рекуррентные формулы.

1. Найти общее решение следующих линейных однородных рекуррентных соотношений второго порядка:

   $$a_{n+2} = 7a_{n+1} - 12a_n; \qquad a_{n+2} = 4a_{n+1} - 13a_n; \qquad a_{n+2} = -4a_{n+1} - 4a_n.$$

2. Построить общее решение рекуррентного соотношения вида

   $$a_{n+5} = 2a_{n+4} + 16a_{n+1} - 32a_n.$$

3. Доказать, что наибольший общий делитель чисел Фибоначчи F_n и F_m есть число Фибоначчи F_d, где d есть наибольший общий делитель чисел n и m:

   $$\gcd(F_n, F_m) = F_d, \qquad d = \gcd(n, m).$$

4. На плоскости нарисованы n окружностей так, что любая пара окружностей пересекается ровно по двум точкам, и никакие три окружности не имеют общей точки пересечения. Определить количество a_n областей, на которые разбивается плоскость такими окружностями.

5. Построить общее решение неоднородного рекуррентного соотношения второго порядка

   $$a_{n+2} = 5\,a_{n+1} - 6\,a_n + 6 \cdot 3^n.$$

6. Построить общее решение неоднородного рекуррентного соотношения второго порядка

   $$a_{n+2} = 3\,a_{n+1} - 2\,a_n + 3 \cdot \sin(n\pi/2).$$

7. Космический зонд обнаружил, что органическое вещество на Марсе имеет ДНК, состоящее из пяти символов (a, b, c, d, e). Четыре пары символов — *ce*, *cd*, *ed*, *ee* — никогда не встречаются в марсианских ДНК, однако любая цепочка, не содержащая этих пар, возможна. Порядок букв в цепочке важен, поэтому, например, цепочка *bbdca* возможна, а *bbcda* — нет. Найти рекуррентные соотношения, которым удовлетворяют эти цепочки слов. Построить решения этих рекуррентных соотношений.

8. Доказать, что возможна, вообще говоря, фибоначчиева система исчисления, показав, что любое натуральное число N можно единственным образом представить в виде суммы

$$N = a_2 F_2 + \ldots + a_n F_n,$$

в которой коэффициенты a_i равны 0 или 1, а кроме того, никакие два идущих подряд элемента последовательности чисел $\{a_i\}$ не равны одновременно единице.

9. Вывести рекуррентную формулу для количества путйе Моцкина. Пути Моцкина строятся аналочно путям Дика, только также разрешены горизонтальные ходы.

10. Пусть $B_k(n)$ есть количество разбиений, таких, что если числа i и j входят в один и тот же блок, то $|i - j| > k$. Доказать, что $B_k(n) = B(n - k)$ для всех $n \geq k$.