Найти асимптотику методом Лапласа. Явно указать зависимость диаметра малой окрестности около локального максимума подынтегральной функции от величины большого параметра (зависимость $\delta(\lambda)$). Найти главный член асимптотики и порядок поправки.

1. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^n}$
2. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^n n^{-x}}{(1+x^2)^n}\,dx$ (за решение этой задачи полагается 1 бонусный балл)
3. $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k k! n^{-k}$ (За решение этой задачи полагается два бонусных балла)

В качестве образца ещё раз аккуратно опишу выбор $\delta(\lambda)$ на примере, разобранном в классе

$$\int\limits_0^1 (1+x^4)^{-\lambda}\,dx = \int\limits_0^1 e^{-\lambda\ln(1+x^4)}\,dx = \int\limits_0^\delta e^{-\lambda\ln(1+x^4)}\,dx + \int\limits_\delta^1 e^{-\lambda\ln(1+x^4)}\,dx.$$

Поскольку у функции $\ln(1+x^4)$ ярко выраженный локальный экстремум в нуле, предполагаем, что интеграл по отрезку $[\delta,1]$ при достаточно больших λ пренебрежимо мал относительно интеграла по отрезку $[0,\delta]$.

Из монотонности функции $\ln(1+x^4)$ следует оценка сверху для второго интеграла

$$\int\limits_\delta^1 e^{-\lambda\ln(1+x^4)}\,dx \leqslant \int\limits_\delta^1 e^{-\lambda\ln(1+\delta^4)}\,dx \leqslant e^{-\lambda\ln(1+\delta^4)}.$$

Таким образом, интеграл по отрезку $[\delta,1]$ экспоненциально мал, когда $\lambda\ln(1+\delta^4)$ равномерно отделено от нуля. Применяя известное неравенство для логарифма

$$r-\frac{r^2}{2}\leqslant \ln(1+r)\leqslant r \text{ при } r>0,$$

выводим оценку

$$\lambda\ln(1+\delta^4)\geqslant \lambda(\delta^4-\delta^8/2),$$

которая показывает, что для равномерной отделённости величин $\lambda\ln(1+\delta^4)$ от нуля достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lambda\delta^4>c>0 \tag{1}$$

для некоторой константы c.

Теперь займёмся интегралом по отрезку $[0,\delta]$. Подставляя разложение Тейлора $\ln(1+x^4)=x^4+O(x^8)$ в интеграл, приходим к асимптотическому равенству

$$\int\limits_0^\delta e^{-\lambda\ln(1+x^4)}x,dx = \int\limits_0^\delta e^{-\lambda x^4+\lambda O(x^8)}\,dx.$$

Поскольку мы хотим выделить главный подынтегральный член $e^{-\lambda x^4}$, нам необходимо выбрать размер окрестности $\delta(\lambda)$ таким, чтобы λx^8 равномерно по $x\in[0,\delta]$ стремилось к нулю. Этого можно добиться, если

$$\lambda\delta^8\to 0, \text{ т.е. } \delta(\lambda)=o(1/\sqrt[8]{\lambda}) \text{ при } \lambda\to+\infty. \tag{2}$$

Если (2) выполнено, то, раскладывая подынтегральное выражение по Тейлору, приходим к соотношениям

$$\int\limits_0^\delta e^{-\lambda\delta^4+\lambda O(x^8)}\,dx = \int\limits_0^\delta e^{-\lambda\delta^4}(1+O(\lambda x^8))\,dx = \int\limits_0^\delta e^{-\lambda\delta^4}\,dx + O\left(\lambda\int\limits_0^\delta e^{-\lambda\delta^4}x^8\,dx\right)$$

Делая замену переменных $t=\sqrt[4]{\lambda}x$, преобразуем исходный интеграл к виду

$$\int\limits_0^\delta e^{-\lambda\ln(1+x^4)}\,dx = \lambda^{-1/4}\int\limits_0^{\sqrt[4]{\lambda}\delta} e^{-t^4}\,dt + O\left(\lambda^{-5/4}\int\limits_0^{\sqrt[4]{\lambda}\delta} e^{-t^4}t^8\,dx\right).$$

При условии, что

$$\sqrt[4]{\lambda}\delta\to\infty \text{ при } \lambda\to+\infty \text{ равномерно по } x\in[0,\delta], \tag{3}$$

с точностью до экспоненциально малой поправки интеграл в первом слагаемом равен несобственному интегралу

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^4}\,dt = \Gamma\left(\frac{5}{4}\right).$$

Аналогично второй интеграл оценивается сходящимся несобственным интегралом

$$\int\limits_0^{\sqrt[4]{\lambda}\delta} e^{-t^4} t^8\,dx \leqslant \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^4} t^8\,dx.$$

В итоге при выполнении условий (1)-(3) при $\lambda \to +\infty$ оказывается верной асимптотика

$$\int\limits_0^1 (1+x^4)^{-\lambda}\,dx \to \lambda^{-1/4}\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) + O(\lambda^{-5/4}).$$

Для выполнения условий (1)-(3) достаточно взять, к примеру, $\delta(\lambda) = \lambda^{-1/6}$.