Листочек 15.09.2017

1. Верно ли, что каждый простой эйлеров граф имеет четное количество ребер? А простой эйлеров граф, построенный на четном количестве вершин? А эйлеров двудольный граф?

2. Пусть в связном графе G ровно $2k$ вершин имеют нечетную степень. Доказать, что этот граф можно представить в виде объединения k (не обязательно простых) путей.

3. Построить для значений $n = 2$, $k = 4$ граф де Брейна и с его помощью найти хотя бы одну последовательность де Брейна $B(2,4)$.

4. Имеется кусок проволоки длиной 12 сантиметров. На какое минимальное количество кусков его следует разрезать, чтобы из этих кусков можно было бы изготовить каркас кубика размерами $1\times1\times1$ при условии, что проволоку в процессе изготовления кубиков можно сгибать?

5. Мы хорошо знаем (не правда ли?), что любой граф G, минимальная степень δ в котором больше или равна двух, обязательно содержит цикл. Используя это утверждение и индукцию по количеству m ребер, дать еще одно доказательство достаточности условия Эйлера в неориентированном графе G.

6. Предположим, что связный граф G эйлеров. Рассмотрим следующий алгоритм обхода ребер графа G. Выберем произвольную вершину x_0, а также некоторое инцидентное ей ребро $e_1 := \{x_0, x_1\}$, и зафиксируем путь $T_1 := \{x_0, e_1, x_1\}$. Затем на i-м шаге, $i = 1, \dots, m-1$, рассмотрим граф $G_i := G - E(T_i)$, полученный удалением пройденных ребер e_i пути T_i, а также вершину x_i, до которой мы с помощью этого пути T_i дошли. В случае, если x_i оказалась листом, добавим к пути T_i ребро $e_i = \{x_i, x_{i+1}\}$. В противном случае в качестве очередного ребра $e_i = \{x_i, x_{i+1}\}$ выберем ребро, не являющееся мостом в графе G_i, и добавим его к T_i. В обоих случаях получим новый путь
$$T_{i+1} = \{x_0, e_1, x_1, \dots, x_i, e_i, x_{i+1}\}.$$
Доказать корректность этого алгоритма, а именно, показать, что описанный алгоритм завершится на $(m-1)$-м шаге построением эйлерового цикла T_m в исходном графе G.

7. Мы знаем, что существуют две последовательности де Брейна $B(2,3)$, а именно, бинарные циклические последовательности
$$00010111 \qquad \text{и} \qquad 11101000,$$
в каждой из которых любой возможный 3-мер встречается ровно один раз в виде подпоследовательности $a_i a_{i+1} a_{i+2}$. Доказать, что не существует бинарной циклической последовательности, состоящей из восьми символов, которая бы ровно один раз содержала любой из восьми возможных тримеров в качестве подпоследовательности вида $a_i a_{i+1} a_{i+3}$.

8. Для бесконечного графа (граф, множество вершин которого бесконечно) можно определить понятия односторонне-бесконечной и двусторонне-бесконечной эйлеровой цепи. Сформулируйте

   (a) необходимые

(b) достаточные

(c) необходимые и достаточные

условия для существования односторонне-бесконечной эйлеровой цепи.