

### Задание 3

10.03.2017

**FL 7** Докажите, что язык

$$c) \{ a^n b^m \mid m, n \geq 0, \gcd(m, n) > 1 \}$$

не распознаётся никаким DFA.

**FL 8** Докажите, что класс распознаваемых DFA языков замкнут относительно операции

$$a) \sqrt{L} = \{ m \mid mm \in L \}$$

**Определение.** Будем говорить, что язык  $L$  отделяет слова  $x$  и  $y$ , если существует такое слово  $z$ , что ровно одно из слов  $xz$ ,  $yz$  принадлежит  $L$ . Для неотделимых языком  $L$  слов  $x$ ,  $y$  будем писать  $x \equiv_L y$ .

Индексом  $L$  назовём супремум размеров множеств, в которых все строки попарно отделимы языком  $L$ .

**FL 9** Докажите, что

a) язык  $L$  распознаётся некоторым DFA тогда и только тогда, когда индекс  $L$  конечен.

b) более того, индекс языка равен минимальному размеру распознающего  $L$  автомата.

**FL 10** Пусть язык  $L$  распознаётся некоторым DFA. Всегда ли следующие языки распознаются конечными автоматами?

b)  $h^{-1}(L) = \{ y \mid h(y) \in L \}$ , где  $L \subseteq \Sigma^*$  и  $h$  — некоторый гомоморфизм на  $\Sigma^*$ .

c)  $L/L' = \{ u \mid \exists v : uv \in L, v \in L' \}$ , где  $L' \subseteq \Sigma^*$  — произвольный язык.

d)  $\frac{1}{2}L = \{ u \mid u \in \Sigma^*, \exists v \in \Sigma^* : |u| = |v|, uv \in L \}$

e)  $SUBSEQ(L) = \{ a_1, \dots, a_n \mid n \geq 0, a_i \in \Sigma, \exists u_0, \dots, u_n \in \Sigma^* : u_0 a_1 u_1 a_2 \dots, a_n u_n \in L \}$

f)  $PERMUTE(L) = \{ a_{k_1}, \dots, a_{k_n} \mid n \geq 0, (k_1, \dots, k_n) — \text{некоторая перестановка,}$

$a_i \in \Sigma, a_1, \dots, a_n \in L \}$

g)  $SHIFT(L) = \bigcup_{k \geq 0} \{ a_{k+1}, \dots, a_n a_1, \dots, a_k \mid a_1, \dots, a_n \in L \}$

**FL 11** Докажите, что любой бесконечный язык, распознающийся DFA, можно разбить на два бесконечных регулярных языка, распознающихся DFA.

**Определение.** Будем говорить, что co-NFA  $A = (\Sigma, Q, q_0, \delta, F)$  принимает слово  $x \in \Sigma^*$ , если  $A$  заканчивает каждое вычисление на входе  $x$  в состоянии из  $F$ .

**FL 13** Докажите, что класс языков, распознающихся co-NFA, совпадает с классом языков, распознающихся NFA.

**FL 14** Существует ли такое семейство языков  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , что  $E_n$  распознаётся NFA с  $n$  состояниями, но требует DFA размера как минимум  $c^n$  для некоторого  $c > 1$ ?

**FL 15** Пусть  $A \subseteq \mathbb{N}$ . Введём обозначение:

$$B_k(A) = \{ w \mid w — \text{представление некоторого числа из } A \text{ в } k\text{-ичной системе счисления} \}$$

Приведите пример множества  $A$ , для которого  $B_2(A)$  распознаётся DFA, а  $B_3(A)$  не распознаётся DFA.

**FL 16** Для некоторого NFA рассмотрим  $\hat{\delta}(q, w)$  — расширенную на все строки функцию перехода:

$$\hat{\delta}(q, \varepsilon) = q,$$

$$\hat{\delta}(q, xa) = \bigcup_{p \in \delta(q, x)} \hat{\delta}(p, a)$$

Докажите, что для произвольного слова  $w$

$$\hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists r_0, \dots, r_{|w|} : r_0 = q_0, r_{|w|} \in F, r_i \in \delta(r_{i-1}, w_i)$$