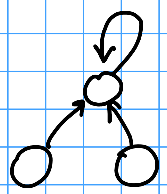
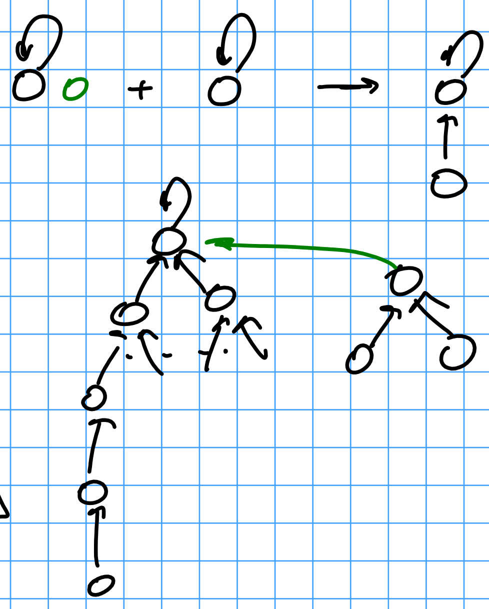
Система непересекающихся множеств (Disjoint Sets)



Make_set (v)	$O(1)$
Find (v)	$O(n)$
Union (v, u)	$O(1)$

Идея с рангами



```
Make_set(v)
    rank[v] = 0
    parent[v] = v

Union(v, u)
    if rank[v] > rank[u]
        parent[u] = v
    if rank[u] > rank[v]
        parent[v] = u
    if rank[v] = rank[u]
        parent[u] = v
        rank[v] = rank[v] + 1
```

Утв: У корня с рангом k $\geq 2^k - 1$ потомков.
В дереве с корнем ранга k $\geq 2^k$ вершин.

$\triangleright$ База: см Make_set

Переход: $\exists$ rank[v] = rank[u] = k

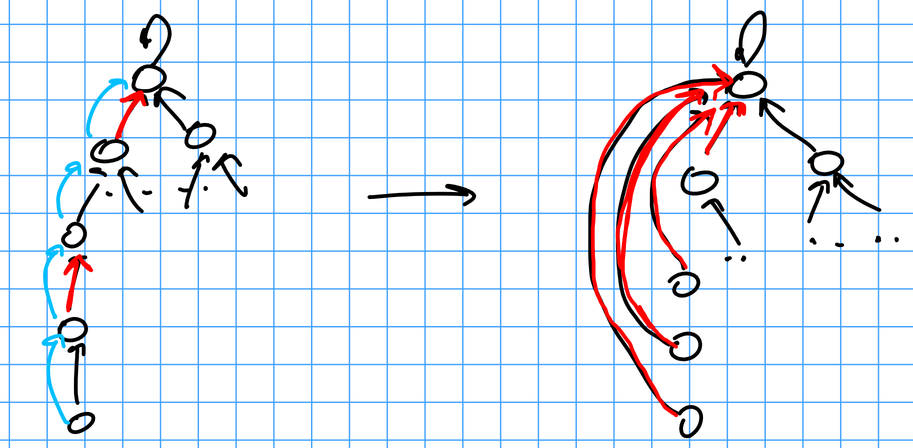
В объединении $\geq 2^{k+1}$ вершина

$\geq 2^k + 2^k = 2^{k+1}$ $\triangleleft$

Следствие: $\max \text{rank} \leq \log n$

Следствие: Find работает за $O(\log n)$

Эвристика "сжатие путей"



```
Find (v):
    if parent[v] ≠ v
        parent[v] = Find(parent[v])
    return parent[v]
```

Следствие: ранг ≠ высоте

Утв: Ранг вершины фиксируется, когда она перестаёт быть корневой.

Утв: В цепочке Find() ранги возрастают.

$\equiv$ $\exists$ нужно сделать m операций Find $\equiv$ Вычислим амортизированную стоимость Find

Разобьём $[1 \dots \log n]$ на отрезки:

$[1], [2], [3, 4], [5 \dots 16], [17 \dots 2^{16}] \dots$

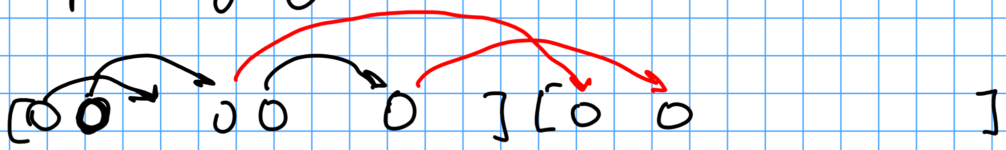
$\dots [(2^{16}+1) \dots 2^{2^{16}}] \dots [k+1, 2^k] \dots [\dots \log n]$

65537 $\quad 2^{65536}$

Всего будет $\log^* n$ интервалов.

$\log^* 2^{16} = 4$ (# итераций log, чтобы получить число ≤ 1).

Рёбра двух типов:



Чёрные: м/у вершинами с рангом из одного интервала.

Красные: —"— разных интервалов.

Утв: в любой цепочке $\leq \log^* n$ красных рёбер

▷ Всего интервалов $\log^* n$ ◁

Следствие: $\forall$ Find проходит по $\leq \log^* n$ красным рёбрам

◁ $[k+1 \dots 2^k]$

Вершине из это интервала позволен 2^k переходов.

Утв: Вершин с рангом k не более чем $\frac{n}{2^k}$

Сколько они позволили переходов по чёрным рёбрам?

$$\sum_{i=k+1}^{2^k} \frac{n}{2^i} \cdot 2^k = 2^k \cdot \overbrace{\left(\frac{n}{2^{k+1}} + \frac{n}{2^{k+2}} + \dots\right)}^{< \frac{n}{2^k}} < 2^k \cdot \frac{n}{2^k} = n$$

Т.е. в каждом интервале нам разрешили не более чем n переходов.

$\Rightarrow$ Всего $n \cdot \log^* n$ переходов.

Пусть мы сделали m операций Find

Всего переходов = Всего по красным рёбрам + всего по чёрным рёбрам =

$$\underline{O(m\cdot\log^* n)} + \underline{O(n\cdot\log^* n)} + O(m) = \underline{O(m\log^* n)}$$

ребро к корню

$m \geq n$

рёбра

вершины