

ДЗ на 17 марта

- 1) Дана система линейных уравнений над полем K и пусть $L \supset K$ — большее поле. Докажите, что эта система имеет решение в L тогда и только тогда, когда она имеет решение в K , более того, размерность (сдвинутого) пространства решений одна и та же.
- 2) Набор барашков таков, что при выкидывании любого из этих барашков всех остальных можно разбить на два стада равного веса. Докажите, что веса всех барашков равны. Веса барашков а) целые б) рациональные в) вещественные.
- 3) $f, g, h : V \rightarrow K$ линейное отображение (векторных пространств над полем K). а) Докажите, что если $\ker(f) = \ker(g)$ то $f = kg$ для некоторого $k \in K$ б) если $\ker(f) \supset \ker(g) \cap \ker(h)$, то $f = kg + lh$ при некоторых $k, l \in K$.
- 4) $A : V \rightarrow V$ линейное отображение такое, что $\ker(A)$ трёхмерно, а $\ker(A^2)$ шестимерно. Докажите, что $\ker(A) \subset \operatorname{Im}(A)$.
- 5) Докажите, что в наборе из $2n - 1$ иррациональных чисел найдётся поднабор из n чисел такой, что сумма любых нескольких чисел из этого набора иррациональна. а) числа имеют вид $a + b\sqrt{2}$ б) $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}$ ($a, b, c \in \mathbb{Q}$) в) общий случай.