1 Обязательное домашнее задание (в этот раз маленькое)

Задание 1.1. Пусть $\xi \sim Exp(\lambda)$. Найти (для любого $a > 0$) условное распределение величины $(\xi - a) \mid \xi > a$. *a — параметр, числовая константа*

Задание 1.2. Пусть ξ — случайная величина с плотностью $f(x)$. Найти плотность случайной величины $a\xi + b$.

Задание 1.3. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d \sim Pois(\lambda)$ — независимые случайные величины с распределением Пуассона. Найти распределение случайной величины $\eta = \sum_i \xi_i$.

Задание 1.4. Пусть f — ограниченная функция. Найти матожидание и дисперсию величины $\eta = f(\xi)$, где $\xi \sim U[0,\,1]$.

Задание 1.5. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые испытания Бернулли с вероятностью $p = 1/2$. Найти предельное распределение (имеется ввиду, конечно, слабый предел) $\xi_1/2 + \xi_2/4 + \xi_3/8 + \dots$.

2 Задачи, разобранные 14 марта

Задание 2.1. Выразить матожидание и дисперсию распределения в терминах его производящей функции.

Задание 2.2. Придумать пример последовательности случайных величин, сходящихся по вероятности, но не сходящихся почти наверное.

3 Задачи, запланированные на 14 марта, но оставшиеся на потом

3.1 Задачи для самостоятельного решения (спрашивать не буду, но посмотреть и подумать полезно; по сложности аналогичны “обязательному д.з.”)

Задание 3.1. Пусть ξ — случайная величина с производящей функцией $P(x)$. Найти производящую функцию случайной величины $a\xi + b$. $(a, b \in \mathsf{N} \cup \{0\})$

Задание 3.2. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые одинаково непрерывно распределенные случайные величины. Рассмотрим $\eta_k = \#\{i \le k \mid \xi_i \le \xi_k\}$. *Здесь, конечно, имеется ввиду просто номер ξ_k в переупорядоченной последовательности первых k случайных величин.* Найти распределение η_k и предельное распределение η_k/k.

Задание 3.3. Пусть $\alpha \sim U[0,\,1]$. Найти условное распределение $\alpha \mid \alpha > a$.

Задание 3.4. Пусть $\xi \sim Geom(\lambda)$ (геометрическое). Найти условное распределение $\xi - a \mid \xi > a$.

Задание 3.5. Пусть $\alpha \sim U[0,\,1], n \in \mathsf{N}$. Найти распределения величин $\lceil n\alpha \rceil$ и $\{n\alpha\}$. *Целая и дробная часть* Будут ли они независимы?

Задание 3.6. Показать, что нормировочная константа в плотности нормального распределения действительно имеет вид $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Задание 3.7. Будем говорить, что последовательность с.в. $\xi_1, \xi_2, \dots$ сходится к с.в. ξ *в среднем*, если $\mathsf{E}|\xi_i - \xi| \to 0$. Аналогично, будем говорить, что имеет место сходимость *в среднеквадратичном*, если $\mathsf{E}(\xi_i - \xi)^2 \to 0$.

Показать, что из сходимости случайных величин в среднем и среднеквадратичном следует сходимость по вероятности (воспользоваться неравенством Маркова). Какая сходимость сильнее, в среднем или в среднеквадратичном?

Задание 3.8. Найти вероятности для каждого элементарного исхода для негативно-биномиального распределения $NB(r,p)$, т.е. распределение числа успехов до r-й неудачи в испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p. *Давайте все-таки добьем этот самый негативный бином и выведем формулу точно*

Задание 3.9. Пусть f — некоторая произвольная функция. Найти матожидание и дисперсию (если они существуют) величины $f(\xi)/g(\xi)$, где ξ — случайная величина с плотностью $g(x)$. При каких условиях существуют матожидание и дисперсия?

3.2 Задачи, которые я планирую разбирать в следующий раз

Задание 3.10. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d \sim U[0,\,1]$, независимы. Обозначим $\alpha_{[1]}, \dots, \alpha_{[d]}$ — *порядковые статистики* выборки $\{\alpha_i\}_i$, т.е. упорядоченные по возрастанию и перенумерованные значения α_i. (Т.о. $\alpha_{[1]} \equiv \min_i \alpha_i$). Найти распределение $\alpha_{[i]}$.

Задание 3.11. Пусть ξ, η — независимые случайные величины с плотностями $f_\xi(x), f_\eta(x)$ соответственно. Найти плотности с.в. $\xi + \eta$ и $\xi - \eta$.

Задание 3.12. Пусть $\xi_1, \xi_2 \sim U[0,\,1]$ — независимые равномерно распределенные с.в. Найти распределение случайной величины $\eta = \xi_1 + \xi_2$.

Задание 3.13. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d$ — независимые нормально распределенные случайные величины с матожиданиями μ_i и дисперсиями σ_i^2. Найти распределение $\eta = \sum_i \xi_i$.

Задание 3.14. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d \sim \Gamma(\theta, k_i)$ — независимые случайные величины с Гамма-распределением. *θ одна на всех, а k могут быть разными* Найти распределение случайной величины $\eta = \sum_i \xi_i$.

Задание 3.15. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_d \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, независимые. Показать, что выборочное среднее $a = \sum_i \xi_i/d$ и выборочная дисперсия $\sum_i (\xi_i - a)^2/d$ будут независимы. Найти распределение выборочного среднего и (со звездочкой) выборочной дисперсии).

Задание 3.16. Пусть распределение случайной величины ξ — смесь распределений с плотностями $f_k(x)$ взятых с весами p_k. Пусть $\xi = a$. К какой из компонент смеси наиболее вероятно относится полученное наблюдение?

Задание 3.17. Мы ударяем по монетке молотком, в результате она изгибается случайным образом и вероятность выпадения орла становится $p \sim U[0,\,1]$. Затем мы начинаем подбрасывать монетку и получаем последовательность значений $b_1, b_2, \dots$ (считаем орла за 1, а решетку за 0). Пусть $s_k = \sum_{i=1}^k b_i/k \to \pi$.

Для каждого k рассмотрим байесовское условное (апостериорное) распределение $\mathcal{D}_k$ для параметра p после результата k-го броска (т.е. k-е апостериорное распределение получено с использованием информации о первых k результатах бросания).

Установить вид этих распределений и найти слабый предел при $k \to \infty$. *Изменится ли результат, если в качестве априорного распределения параметра p взять не равномерное, а произвольное Бета-распределение?*