Список вопросов к экзамену по математическому анализу
АУ, первый семестр, осень 2016 года

Глава I. Введение

1. Множества: упорядоченная пара, декартово произведение, операции над множествами. Правила де Моргана.

2. Отношения: область определения, область значений, обратное отношение, композиция отношений, свойства, примеры.

3. Аксиомы вещественных чисел. Принцип математической индукции. Существование наибольшего и наименьшего элемента в конечном множестве. Следствия.

4. Принцип Архимеда. Следствия.

5. ! Супремум и инфимум. Определение и теорема существования. Характеристика супремума.

6. ! Теорема о вложенных отрезках. Существенность условий.

Глава II. Последовательности вещественных чисел

7. ! Монотонные и ограниченные последовательности. Два определения предела и их равносильность. Примеры.

8. ! Простейшие свойства пределов последовательностей (единственность предела, предельный переход в неравенстве, ограниченность).

9. ! Теорема о стабилизации знака и теорема о двух милиционерах. Следствия.

10. ! Предел монотонной последовательности.

11. Арифметические свойства пределов последовательности.

12. ! Бесконечные пределы. Бесконечно большие. Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими. Аналоги теорем для бесконечных пределов.

13. Арифметические действия в $\overline{\mathbb{R}}$. Примеры.

14. Неравенство Бернулли.

15. ! Определение числа e.

16. Сравнение скорости возрастания последовательностей n^k, a^n, $n!$ и n^n.

17. Теорема Штольца (для неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$). Сумма m-ых степеней натуральных чисел.

18. Теорема Штольца (для неопределенности $\frac{0}{0}$).

19. Подпоследовательности (определение и простейшие свойства). Теорема о стягивающихся отрезках.

20. ! Теорема Больцано–Вейерштрасса (в том числе и случай неограниченной последовательности).

21. ! Фундаментальные последовательности. Свойства. Критерий Коши.

22. Верхний и нижний пределы. Частичные пределы. Связь между ними.

23. Характеристика верхних и нижних пределов с помощью N и ε.

24. ! Сходимость рядов. Необходимое условие сходимости рядов. Примеры.

25. Простейшие свойства сходящихся рядов.

Глава III. Пределы и непрерывность функций

26. Окрестности и проколотые окрестности. Предельные точки множества.

27. ! Определения предела функций в точке. Простейшие свойства.

28. ! Равносильность определения предела по Коши и по Гейне.

29. Свойства функций, имеющих предел.

30. Арифметические действия с пределами.

31. ! Теорема о предельном переходе в неравенствах. Теорема о двух милиционерах.

32. Левый и правый пределы. Предел монотонной функции.

33. ! Критерий Коши для предела функций.

34. ! Определения непрерывных функций. Их равносильность.

35. Арифметические действия с непрерывными функциями. Непрерывность многочленов и рациональных функций.

36. Теорема о стабилизации знака. Теорема о непрерывности композиции. Пример.

37. Неравенства между синусом и аргументом. Непрерывность тригонометрических функций.

38. ! Теорема Вейерштрасса. Существенность условий.

39. ! Теорема Больцано–Коши. Существенность условий.

40. Теоремы о непрерывных образах отрезка и промежутка.

41. Непрерывность обратной функции.

42. Непрерывность обратных тригонометрических функций. Предел $\lim \frac{\sin x}{x}$.

43. Определение степенной функции и показательной функции от рационального аргумента и их свойства.

44. Определение показательной функции. Корректность и непрерывность.

45. Определение и непрерывность логарифма и степенной функии. Пределы $\lim \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ и $\lim\,(1+x)^{1/x}$.

46. Пределы $\lim \frac{\ln(1+x)}{x}$, $\lim \frac{(1+x)^p-1}{x}$ и $\lim \frac{a^x-1}{x}$.

47. Сравнение функций: отношение эквивалентности, символы Ландау, свойства, примеры.

Глава IV. Дифференциальное исчисление

48. ! Определение производной и дифференцируемости функции в точке. Критерий дифференцируемости.

49. Левая и правая производные. Бесконечные производные. Примеры.

50. Геометрический смысл производной. Дифференциал. Непрерывность дифференцируемой функции.

51. Арифметические действия с дифференцируемыми функциями.

52. ! Теорема о дифференцируемости композиции.

53. Теорема о дифференцируемости обратной функции.

54. Производные элементарных функций.

55. ! Теоремы Ферма и Ролля.

56. ! Теорема Лагранжа и Коши.

57. ! Следствия теоремы Лагранжа. Характеристика монотонности дифференцируемых функций.

58. Теорема Дарбу.

59. Правило Лопиталя (для $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$). Примеры.

60. Определение производной n-го порядка. Классы $C^n(E)$. Несовпадение классов $C^n(E)$.

61. Арифметические свойства производных n-го порядка. Производные n-го порядка некоторых элементарных функций.

62. Формула Тейлора для многочленов.

63. ! Формулы Тейлора с остатком в форме Пеано (с леммой).

64. ! Формулы Тейлора с остатком в форме Лагранжа.

65. ! Формулы Тейлора для e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^p$.

66. Следствия формулы Тейлора с остатком в форме Лагранжа. Разложения $\sin x$, $\cos x$ и e^x в ряд.

67. Иррациональность числа e.

68. ! Локальные максимумы и минимумы. Необходимое условие экстремума.

69. ! Достаточные условия экстремума для дифференцируемых функций.

70. Выпуклые и вогнутые функции. Переформулировки определения выпуклости. Лемма о трех хордах.

71. Непрерывность и дифференцируемость выпуклой функции. Характеристика выпуклых функций с помощью касательных.

72. Критерии выпуклости в терминах первой и второй производных. Примеры.

73. Неравенство Йенсена.

74. Неравенство о средних и неравенство между средними степенными.

75. Неравенства Гёльдера и Минковского.

Глава V. Интегральное исчисление

76. ! Определение первообразной и неопределенного интеграла. Общий вид первообразной. Примеры функций не имеющих первообразную.

77. Таблица интегралов. Линейность интеграла.

78. Теоремы о замене переменной в неопределенном интеграле.

79. Формула интегрирования по частям. Примеры.

80. Определение и простейшие свойства площади и псевдоплощади.

81. Пример псевдоплощади, определенной на всех ограниченных подмножествах плоскости.

82. ! Положительная и отрицательная части функции и их свойства. Подграфик функции. Определенный интеграл. Определение и простейшие совйства.

83. Аддитивность интеграла и монотонность интеграла.

84. ! Следствия монотонности интеграла. Среднее значение функции. Теорема о среднем.

85. ! Интеграл с переменным верхним пределом. Теорема Барроу. Следствия. Формула Ньютона–Лейбница.

Примечания

Особо важные вопросы помечены восклицательным знаком.

Студенты, успешно сдавшие коллоквиум, отвечают вопросы с доказательством лишь из второй части (вопросы 36–85). Сдача коллоквиума не освобождает от необходимости знать формулировки из обеих частей курса.

Незнание хотя бы одной из следующих определений и формулировок влечет оценку “неудовлетворительно”: супремум и инфимум; предел последовательности и функции (в разных ситуациях и на разных языках); фундаментальные последовательности; сумма ряда; теорема о двух милиционерах для последовательностей и для функций; непрерывность, теоремы Больцано–Коши и Вейерштрасса о непрерывных функциях; замечательные пределы, O-символика; определение производной и дифференцируемости функции в точке; производные элементарных функций; теоремы Ферма, Ролля и Лагранжа; формула Тейлора, формулы Тейлора для e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$; условия монотонности функции; определение, необходимое и достаточное условия экстремума; выпуклые функции и условия выпуклости в терминах производных; первообразная и неопределенный интеграл; определение определенного интеграла; теоремы о среднем; теоремы Барроу; формулы Ньютона–Лейбница.

Изложение определенного интеграла было близко к тексту:
`http://math.spbu.ru/analysis/tutorial/pan_integral_2016.pdf`

Видеозаписи лекций, очень близких к курсу можно найти тут:
`https://stepik.org/course/716/` (I–III главы) и `https://stepik.org/course/711/` (IV–V главы).