# Практика

17 февраля 2012 г.

## 1 Комбинаторы неподвижной точки

$Y \equiv \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$
$YF \equiv (\lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx)))F$
$\to_\beta (\lambda x.F(xx))(\lambda x.F(xx))$
$\to_\beta F(\ (\lambda x.F(xx))(\lambda x.F(xx))\ )$
$\leftarrow_\beta F(\ (\lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx)))F\ )$
$\equiv F(YF)$
Таким образом $YF =_\beta F(YF)$, но не $YF \to_\beta F(YF)$.

$\theta \equiv (\lambda xy.y(xxy))(\lambda xy.y(xxy))$
$\theta F \equiv (\lambda xy.y(xxy))(\lambda xy.y(xxy))F$
$\to_\beta (\lambda y.y(\ (\lambda xy.y(xxy))(\lambda xy.y(xxy))y\ ))F$
$\equiv (\lambda y.y(\theta y))F$
$\to_\beta F(\theta F)$
Таким образом $\theta F \to_\beta F(\theta F)$.

### 1.1 Решение рекурсивных уравнений

Возьмем уравнение $FMNL = M(LF)(NY)$

1. Представляем в виде $F = C[F] : F = \lambda mnl.m(lF)(Fn)$
2. Представляем в виде $F = GF$, где G - замкнутый терм, абстрагируя F: $F = (\lambda fmnl.m(lf)(fn))F$. В данном случае $G = \lambda fmnl.m(lf)(ny)$
3. F является фиксированной точкой G, следовательно $F = YG$

Несложно убедится, что найденный терм удовлетворяет уравнению:
$FMNL \equiv YGMNL \equiv Y(\lambda fmnl.m(lf)(fn))MNL$
$=_\beta (\lambda fmnl.m(lf)(fn))(Y(\lambda fmnl.m(lf)(fn)))MNL$
$\equiv (\lambda fmnl.m(lf)(fn))(YG)MNL$
$\equiv (\lambda fmnl.m(lf)(fn))FMNL$
$\to_\beta (\lambda mnl.m(lF)(Fn))MNL$
$\to_\beta (\lambda nl.M(lF)(Fn))NL$

$\to_\beta (\lambda l.M(lF)(FN))L$
$\to_\beta M(LF)(FN)$

### 1.2 Пример использования комбинатора неподвижной точки для определения факториала

Уравнение на $fac$:
$fac = \lambda n.\ iif\ (iszero\ n)\ \overline{1}\ (mult\ (fac\ (pred\ n))\ n)$
Используя $Y$ получаем определение $fac$:
$fac \equiv Y(\lambda fn.\ iif\ (iszero\ n)\ \overline{1}\ (mult\ (f\ (pred\ n))\ n))$

## 2 Списки

$nil \equiv \lambda ct.t$
$cons \equiv \lambda erct.ce(rct)$
Пустой список $[\,] = nil = \lambda ct.t$
Непустой список $[1, 2, 3] = cons\ 1\ (cons\ 2\ (cons\ 3\ nil)) = \lambda ct.\ c\ 1\ (c\ 2\ (c\ 3\ t))$
$head \equiv \lambda l.l(\lambda xy.x)\Omega$
$isempty \equiv \lambda l.l(\lambda xy.fls)tru$

## 3 Примитивная рекурсия

Реализуем функцию $pred$, удовлетворяющую следующим равенствам:
$pred\ \overline{0} = \overline{0}$
$pred\ \overline{n+1} = \overline{n}$
Определим вспомогательные термы:
$zp \equiv pair\ \overline{0}\ \overline{0}$
$sp \equiv \lambda p.\ pair\ (snd\ p)\ (succ\ (snd\ p))$
Тогда верны следующие равенства:
$sp\ (pair\ \overline{i}\ \overline{j}) =_\beta pair\ \overline{j}\ \overline{j+1}$
$sp^n zp =_\beta pair\ \overline{n-1}\ \overline{n}$
Теперь можно определить $pred$:
$pred = \lambda n.\ fst\ (n\ sp\ zp)$

Оператор примитивной рекурсии $R$ должен удовлетворять следующим равенствам:
$R\ f\ g\ \overline{0} =_\beta f$
$R\ f\ g\ \overline{n+1} =_\beta g\ \overline{n}\ (R\ f\ g\ \overline{n})$
Определим вспомогательные термы:
$zp' \equiv \lambda f.\ pair\ f\ \overline{0}$
$sp' \equiv \lambda gp.pair\ (g(sndp)(fstp))\ (succ\ (snd\ p))$
Теперь заметим, что:

$\overline{0}\ (sp'\ g)\ (fp'\ f) =_\beta zp' f =_\beta pair\ f\ \overline{0} = pair\ (R\ f\ g\ \overline{0})\ \overline{0}$
$\overline{1}\ (sp'\ g)\ (fp'\ f) =_\beta (sp'\ g)\ (zp'\ f) =_\beta pair\ (g\ \overline{0}\ f)\ \overline{1} = pair\ (R\ f\ g\ \overline{1})\ \overline{1}$
$\overline{2}\ (sp'\ g)\ (fp'\ f) =_\beta (sp'\ g)^2\ (zp'\ f) =_\beta pair\ (g\ \overline{1}\ (g\ \overline{0}\ f))\ \overline{2} = pair\ (R\ f\ g\ \overline{2})\ \overline{2}$
$\overline{n}\ (sp'\ g)\ (fp'\ f) =_\beta (sp'\ g)^n\ (zp'\ f) = pair\ (R\ f\ g\ \overline{n})\ \overline{n}$
Теперь мы можем определить R:
$R = \lambda fgn.\ fst\ (n\ (sp'\ g)\ (zp'\ f))$

# 4 Эквивалентность и неэквивалентность термов

Из теоремы Чёрча-Россера следуют следующее свойство:
Если $M =_\beta L_1$, $N =_\beta L_2$, $L_1$ и $L_2$ находятся в нормальной форме и не равны, то $M \neq_\beta N$
Таким образом можно заключить, что термы $S, B, I, tru, pair, cons, Y$ и любой из нумералов чёрча $\lambda sz.s^n z$ попарно не $\beta$-эквивалентны.