

Домашнее задание 10. Мощности множеств и неравенства для биномиальных коэффициентов

Количество задач на зачет: 7.5 (из 12)

1. Какова мощность множества возможных расположений по клеточкам всевозможных прямоугольников на бесконечном клетчатом поле?
2. Обязательно ли является не более чем счётным:
 - а) множество непересекающихся окружностей с бесконечным лучом на плоскости (начало луча лежит на окружности, луч не пересекает в других точках окружность);
 - б) множество непересекающихся букв Г на плоскости;
 - в) множество множество непересекающихся букв Т на плоскости?
3. Покажите, что для всякого более чем счётного множества $A \subset \mathbb{R}$ можно указать точку a , любая окрестность которой пересекается с A по более чем счётному множеству.
4. Найдите мощность множества всех отображений из множества натуральных чисел в себя.
5. Пусть \mathcal{A} – множество всех бесконечных последовательностей из 1 и 2, \mathcal{B} – множество всех последовательностей из 1 и 2, не содержащих комбинаций 121 или 212. Приведите явную биекцию между этими множествами.
6. Отрезок разбит на два непересекающихся подмножества. Докажите, что одно из них имеет мощность континуум.
7. Докажите, что множество точек разрыва неубывающей функции действительного аргумента конечно или счётно.
8. Найдите оценки и асимптотическое выражение для величины $\binom{4n}{n}$.
9. Вычислите произведение $1 \times 3 \times \dots \times 2n - 1$ с помощью формулы Стирлинга.
10. Вычислите $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times 2n}$.