Теорема Форда-Фалкерсона

Практика

27 октября 2017 г.

1. (0.5 балла). Чему равно максимальное количество рёберно непересекающихся простых путей, соединяющих любую пару вершин в полном графе K_n?

2. (1 балл). Возьмем некоторую сеть из n вершин. В каждой её вершине, за исключением стока и истока, добавим петлю с пропускной способностью 1, поменяем местами сток и исток, а потом каждое ребро (x, y) заменим на ребро (y, x) с той же пропускной способностью. Как изменится величина максимального потока в такой сети?

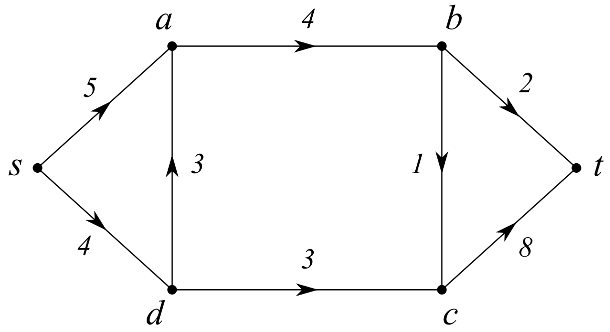

Рис. 1

3. (1 балл). Для сети, изображенной на рис.1, определить минимальный реберный разрез, а также предъявить максимальный поток в этой сети.

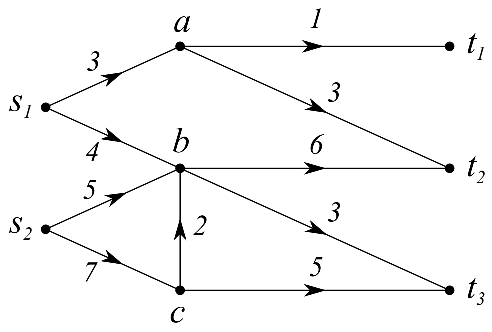

Рис. 2

4. (1 балл). Как использовать алгоритм Форда-Фалкерсона для сети, в которой имеется несколько источников и/или стоков? Проиллюстрировать ответ на примере сети, показанной на рис.2. Определить для этой сети минимальный разрез и соответствующий ему максимальный поток.

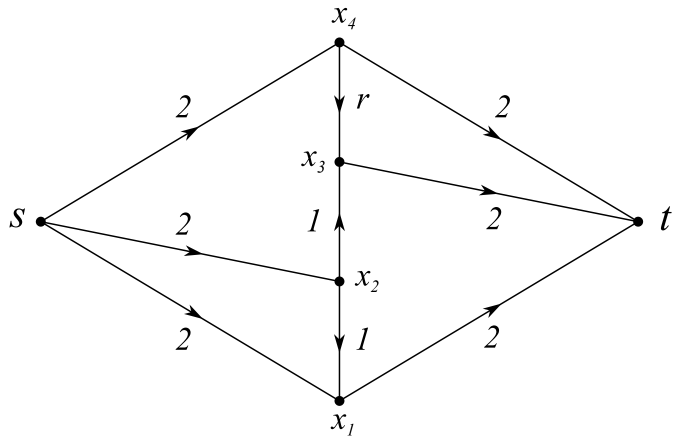

Рис. 3

5. (1 балл). Рассмотрим сеть, изображенную на рис.3. Величина пропускной способности ребра (x_4, x_3) равна $r = (\sqrt{5}-1)/2$ и удовлетворяет уравнению вида $r^2 = 1 - r$. Будем искать максимальный поток в этой сети алгоритмом Форда-Фалкерсона. В качестве первого увеличивающего поток пути возьмём путь (s, x_2, x_3, t). Затем будем увеличивать поток вдоль путей в следующем порядке: $p_1, p_2, p_1, p_3, p_1, p_2, p_1, p_3, \dots$, где $p_1 = (s, x_4, x_3, x_2, x_1, t)$, $p_2 = (s, x_2, x_3, x_4, t)$, $p_3 = (s, x_1, x_2, x_3, t)$. Показать, что при стремлении количества n итераций к бесконечности величина потока не будет стремится к величине максимального потока в этой сети.

6. (1 балл). С помощью алгоритма, использованного при доказательстве теоремы Форда-Фалкерсона, доказать, что в случае целочисленных значений пропускных способностей ребер существует максимальный поток в сети, причем величина этого потока, равно как и значения потока на каждом из ребер, будут целочисленными. Показать, что любой такой максимальный поток можно разбить на потоки, состоящие из простых путей из s в t, величина каждого из которых равна единице. Модифицировать доказательство существования максимального потока в сети для случая рациональных значений пропускных способностей ребер сети.

7. (1.5 балла). Для формирования ученого совета университета необходимо выбрать одного преподавателя от каждой из k университетских кафедр, k — натуральное число, делящееся на три. Один и тот же преподаватель может быть приписан к одной или нескольких кафедр, но может быть выбран в ученый совет только от одной из них. На кафедре работают профессора, доценты и ассистенты. В ученый совет должно входить одинаковое количество преподавателей от каждой из этих трех групп. Описать алгоритм выбора преподавателей в ученый совет.

8. (0.5 балла). Найти количество совершенных паросочетаний в полном графе на четном числе вершин.

9. (0.5 балла). Подсчитать количество совершенных паросочетаний у дерева на n вершинах.

10. (0.5 балла). Найти количество совершенных паросочетаний в колесе W_n.

11. (1 балл). Определить числа $\alpha(G)$, $\alpha'(G)$, $\beta(G)$ и $\beta'(G)$ для графа $G = K_n$.

12. (1 балл). Подсчитать количество совершенных паросочетаний в полном двудольном графе $K_{n,n}$. Как изменится ответ для графа $K_{n,n}$, в котором удалили ребра, входящие в одно из совершенных паросочетаний?

13. (1.5 балла). Пусть M и N есть два паросочетания в графе G, такие, что $|N| > |M|$. Доказать, что существуют паросочетания M' и N', такие, что $|M'| = |M| + 1$, $|N'| = |N| - 1$, $M' \cup N' = M \cup N$ и $M' \cap N' = M \cap N$.

14. (1.5 балла). Определить минимальный размер наибольшего по включению паросочетания в простом цикле C_{11}, построенном на одиннадцати вершинах. Чему будет равен этот размер в случае произвольного простого цикла C_n?