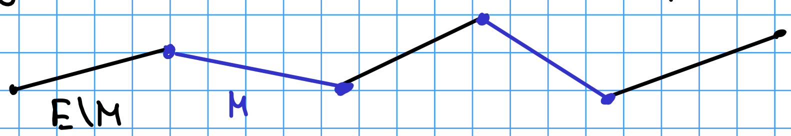
Паросочетания

Напоминание: алг. Форда-Фалкерсона ⟹ алг. для двудольного паросочетания $O(E \cdot E \cdot V) = O(V^5)$

Пусть $M \subseteq E$ — паросочетание

Простой путь состоящий из черед. рёбер из M и $E \setminus M$ ≡ чередующийся путь



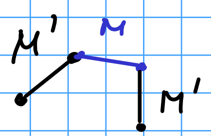
≡ Дополняющий путь — чередующ. путь, т.к. он начинается и заканчивается в свободной (т.е. не из паросочетания) вершине.

Th. $\exists$ доп. путь $\Longleftrightarrow$ M — не макс.

$\Rightarrow$ Инвертируем рёбра вдоль пути $\Rightarrow$ новое паросочетание на 1 больше

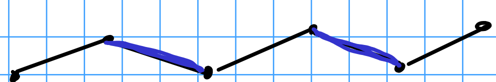
$\Leftarrow$ Пусть M' — макс, $|M'| > |M|$

$\measuredangle$ $M \triangle M'$:



- циклы чётной длины
- чередующ. пути

$\Rightarrow$ в одном из путей на 1 ребро из M' больше



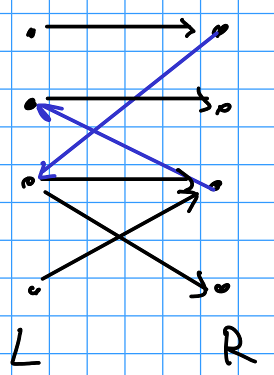
$\Rightarrow$ дополняющий путь.

Алгоритм Куна

$\exists\ G = ((L, R), E)$

По паросочетанию M построим $G_M =$
$= ((L, R), E_M)$ – ор. граф.

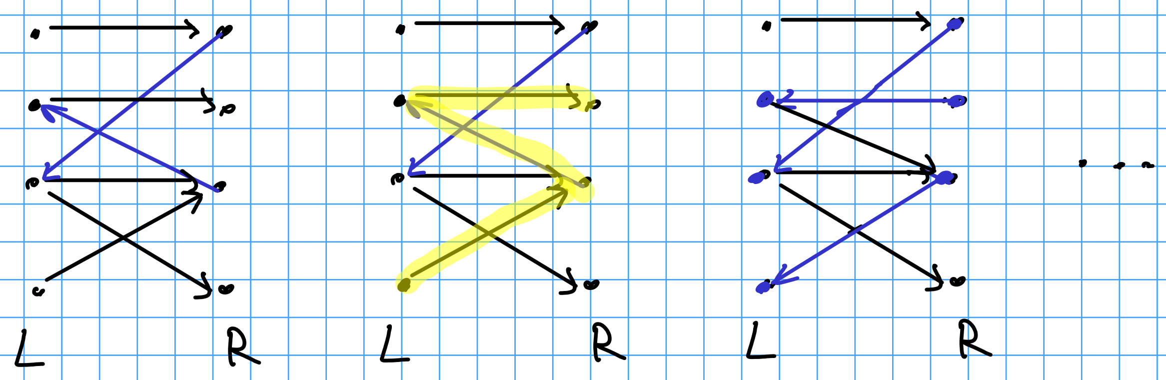
$e \in M \Rightarrow e$ направлено справа налево
$e \notin M \Rightarrow e$ направлено слева направо



Пусть L' и R' – множества свободных вершин в L и R.

NB: путь из L' в R' $\equiv$ дополняющий путь

Пока есть путь из L' в R':
инвертируем рёбра вдоль пути $\Rightarrow$
увеличиваем $|M|$ на $\underline{1}$.



Время работы: $O(V \cdot E) = O(V^3)$

Паросочетание в недвудольных графах

Th. Татта–Бержа

$\forall\ G = (V, E)$

$$\max_{M\text{ - паросоч.}} |M| = \min_{U \subseteq V} \frac{1}{2}\left(|V| + |U| - o(G \setminus U)\right)$$

где $o(G\setminus U)$ – # компонент связности с нечётным # вершин в графе $G \setminus U$

▷ Л $\mu = \max\limits_{M\text{ - паросоч.}} |M|$

$$\mu \leq \left\lfloor \frac{1}{2}|V| \right\rfloor$$

$\mu \leq \sum \left\lfloor \frac{|V_i|}{2} \right\rfloor$, где V_i – это вершины i-ой комп. связн.

$\measuredangle\ U \subseteq V$

$$\mu \leq \left\lfloor \frac{|V| - |U|}{2} \right\rfloor + |U|$$

? μ для $G \setminus U$

$\mu \leq \sum \left\lfloor \frac{|V_i'|}{2} \right\rfloor + |U|$, V_i' – вершины i-ой комп. связн. в $G \setminus U$

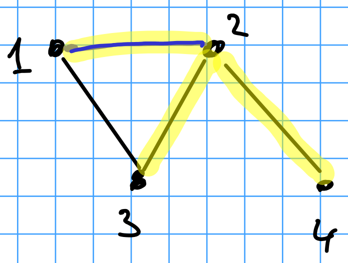
$\Downarrow$

$$\mu \leq \frac{1}{2}\left(|V| - |U| - o(G\setminus U)\right) + |U| =$$

$$= \frac{1}{2}\left(|V| + |U| - o(G \setminus U)\right)$$

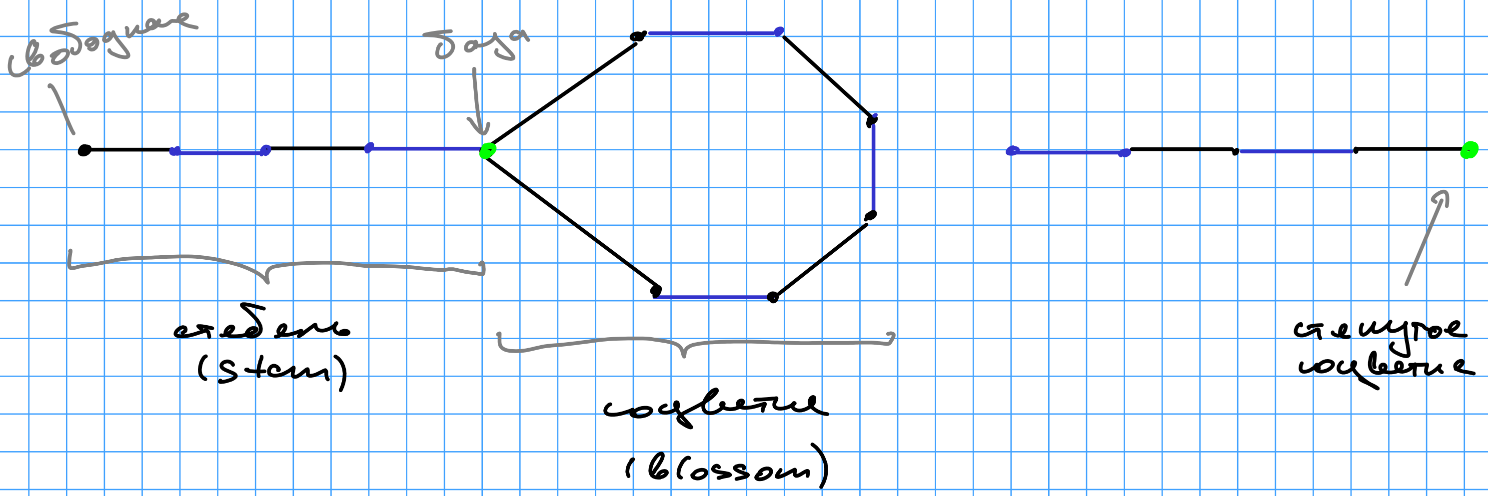
(Мы доказали только '$\leq$') ◁

Алгоритм Эдмонса
(Сжатия соцветий)



Пусть мы запустим BFS/DFS из вершины 3, тогда в дереве может не оказаться дополняющего пути.

Проблема: нечётные циклы



Th. Эдмонса

$\exists$ B — соцветие

Тогда M — максимально в G $\Leftrightarrow$ M/B — максимально в G/B

(G/B — граф G со сжатым соцв. B)

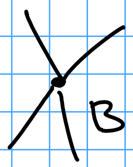
$\triangleright$ $\Rightarrow$ Э $\exists$ M/B не максимально

тогда M' — макс в G/B

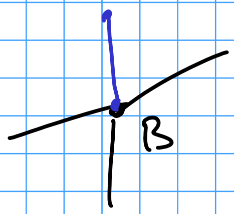
Дополним M' ребрами паросочетания из соцветия B $\Rightarrow$ M''

$$|M''| = |M'| + \frac{|B|-1}{2} \qquad (*)$$

$\measuredangle$ B:



Всё ОК



Вершина соотв. ребру из паросоч. $\leftrightarrow$ база цветка.

$$|M| = |M/B| + \frac{|B|-1}{2}$$

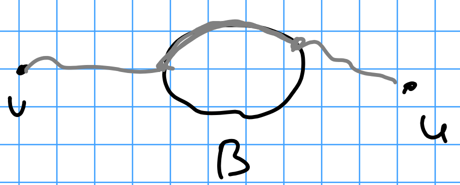
Противоречие с (*), т.к. мы предполагали, что $|M'| > |M/B|$, а значит $|M''| > |M|$, т.е. M - не макс.

$\Leftarrow$ $\exists$ т.е. M/B - макс. в G/B, но при этом M - не максимально в графе G.

$\Rightarrow$ $\exists$ дополняющий путь в G м/у вершинами u и v

1) $u \rightsquigarrow v$ не проходит по соцветию
$\Rightarrow$ увеличение вдоль пути увеличит паросочетание в G/B

2) $\exists$ $u \rightsquigarrow \underbrace{p \rightsquigarrow q}_{\text{часть соцветия } B} \rightsquigarrow v$



Путь $u \rightsquigarrow B$ – будет дополняющим в G/B

NB: При стягивании цветка будем инвертировать рёбра стебля так, что бы база была свободной вершиной, а $\Rightarrow B$ будет свободной в G/B

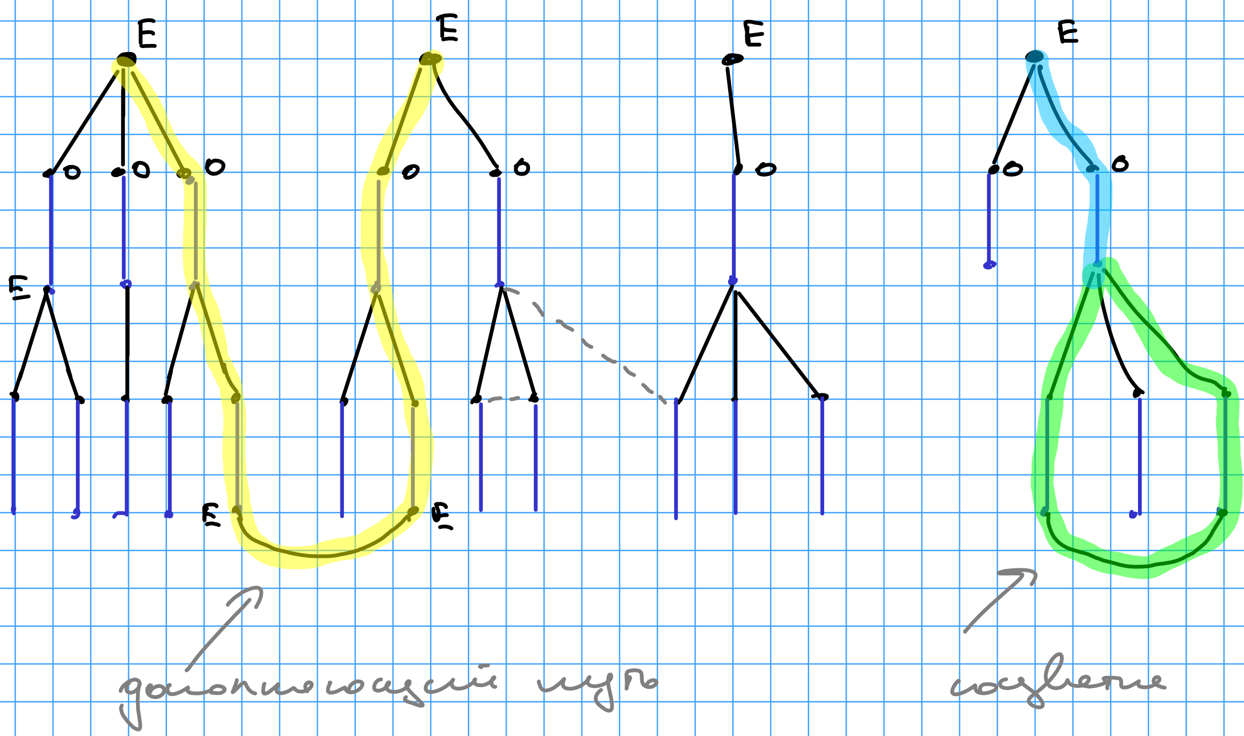
Т.к. B – свободная вершина, то путь $u \rightsquigarrow B$ – дополняющий (u свободна и B свободна)

$\Rightarrow M/B$ – не максимально.

Алгоритм Эдмонса

Итерация: Пометить все свободные вершины как Even

Из $\forall$ Even вершины строим альтерн. дерево



$\measuredangle\ (u,v) \in E$, u — Even

1. v — в паросочетании, т.е. $(v,w) \in M$
   Тогда v — odd
   и добавляем (u,v), (v,w) в дерево
2. V — Even из другого дерева
   т.е. $root(u) \neq root(v)$
   $\Rightarrow$ есть доп. путь
   $root(u) \rightsquigarrow u - v \rightsquigarrow root(v)$
3. V — Even из этого дерева
   $\Rightarrow$ есть цикл
   $lca(v,u) \rightsquigarrow v - u$
   Мы нашли соцветие
   Стягиваем соцветие и
   ищем доп. путь в
   новом графе рекурсивно

$\exists$ алгоритм не находит рёбер типа 1, 2, 3.
$\Rightarrow$ текущее паросочетание максимально.

Нет рёбер Even — Even
$\exists$ Odd — множество odd — вершин
В графе G/Odd $|Even| = o(G/Odd)$
т.к. $\forall$ Even вершина — изолирована
Все остальные компоненты (непокр.) —
паросочетания с чётным # вершин.

$$|M| = |Odd| + \frac{1}{2}\big(\underbrace{|V| - |Even| - |Odd|}_{\text{непомеченные вершины}}\big) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(|V| + |Odd| - |Even|\right)$$

По т. Татта - Бержа

$$M \leq \frac{1}{2}\left(|V| + |Odd| - \underbrace{o(G/Odd)}_{=|Even|}\right)$$

$\Rightarrow$ При $U = Odd$ мы получили равенство в т. Татта - Бержа

$\Rightarrow$ M - максимальное

Th. Время работы

V итераций

- Поиск в ширину

доп. путь цветок

- # цветков $\leq \frac{|V|}{2}$

$$O(V \cdot V \cdot E) = O(V^2 E)$$

Если делать аккуратнее и не прерывать поиск при сжатии цветка

$$O(V(E + V \cdot V)) = O(V^3)$$

Вторая часть док-ва Th. Татта-Бержа

Пусть M - макс. паросоч.

Пусть $G' = (V', E')$ - это граф, построен. алг. Эдмонса (стянули все цветки)

M' - макс. паросочет. в G'

Для M' в G' верн. Th. Татта-Бержа

$$|M'| = \frac{1}{2}\left(|V'| + |Odd'| - o(G'/Odd')\right)$$

Пусть B - последний стянутый цветок.

Пусть $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$ - граф с развёрнут. B

Уо6:

$$|\hat{M}| = \frac{1}{2}\left(|\hat{V}| + |Odd'| - o(\hat{G}/Odd')\right)$$

$$|\hat{M}| = |M'| + \frac{|B| - 1}{2}$$

B при стягивании стала Even

$\Rightarrow$ при разворачивании B останется в компоненте неч. размера

$\Rightarrow o(\hat{G}/Odd') = o(G'/Odd')$

$\Rightarrow$ Th. Татта-Бержа верна уже $\hat{G}$.

Замечание: алгоритм можно доделать до нахождения паросочетания мин. веса.