1. Итак, что же мы с вами сделали на прошлом занятии? Лекция 4

1) Мы установили, что задача расклада k различных предметов по n различным ящикам эквивалентна задаче подсчета числа отображ.

$$f: X \to Y, \quad |X| = k, \quad |Y| = n.$$ и связана с понятием k-перестановок

2) Мы установили, что задача расклада k неразличимых предметов (шаров) по n различным ящикам связана с понятием k-сочетаний и эквив-тна подсчету разбиения числа k на n слаг.:

$$a_1 + \ldots + a_n = k.$$

3). Мы подсчитали кол-во сюръективных отображ. из n-мн-ва X в k-мн-во Y:

$$k^n = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \hat{S}(n,i) \Longleftrightarrow \hat{S}(n,k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n.$$

4) Мы дали еще одну комбинат. интерпретацию кол-в раскладок n различных предметов по k различным ящикам —

а) k^n — число всех k-разделений мн-ва X.

б) $\hat{S}(n,k)$ — число всех упоряд. k-разбиений мн-ва X

5) Наконец, если мы считаем число всех k-разбиений $S(n,k)$, то: $\exists\, k!$ способов эти k разбиений упорядочить

$$\Rightarrow \quad S(n,k) = k!\,\hat{S}(n,k) \Rightarrow \boxed{S(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n}.$$

явная ф-ла для чисел Ст. II рода.

6) Она же — ф-ла для кол-ва размещений n различных предметов по k неразличимым ящикам при условии, что в $\forall$ ящике должен находиться как минимум 1 предмет.

2. Вернемся еще раз к выводу ф-лы

$$k^n = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \hat{S}(n,i).$$

1) Мы считали кол-во всех отображений из n-мн-ва X в k-мн-во Y.

а) ∃ $n < k$: тогда: в ∀ блоке: $|Im\, f| \le n \Rightarrow$

$$\Rightarrow k^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{k}{i} \hat{S}(n,i) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \hat{S}(n,i)$$

за счет того, что $\hat{S}(n,i)=0$ при $i=0$ и $\hat{S}(n,i)=0$ при i

б) ∃ $n \ge k$; тогда: для ∀ отобр-ия $|Im f| \le k$ – размеру мн-ва $Y \Rightarrow$ имеем

$$k^n = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \hat{S}(n,i) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \hat{S}(n,i).$$

Однако я могу писать $\sum$ и от 0 до n; почему? Да потому, что на этот раз $\binom{k}{i}=0$ при $i>k \Rightarrow$ $i>k$ получим нули уже не за счет $\hat{S}(n,i)$, а за $\binom{k}{i}$ – я не могу выбрать подмн-во, большее самого мн-ва.

в) Т.о., в ∀ случае я могу писать, что

$$k^n = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \hat{S}(n,i) = \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} \hat{S}(n,i).$$

---

2) Сейчас мне будет удобна ф-ла

$$k^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} \hat{S}(n,i) = \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} k!\, S(n,i) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{k^n = \sum_{i=0}^{n} (k)_i \cdot S(n,i)}$$ – ф-ла справ. для ∀ целых k

Оказ., эта же ф-ла справедлива и для ∀ вещ. (и даже к. значений, т.е.

$$\boxed{x^n = \sum_{i=0}^{n} (x)_i\, S(n,i)}$$

Эта ф-ла активно используется в теории конечных операторов – она ~~выражает~~ позволяет перейти от базиса x^n к базису $(x)_n$.

4. Th Числа Ст. II рода удовл-ют след. рекурр. соотн. 4

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + k\cdot S(n-1,k) \quad \forall k = 1..n$$

с нач. условиями $S(n,1)=1$; $S(n,k)=0 \ \forall k>n$.

1) При док-ве опять будем использовать принцип разбиения мн-ва (Σ_k всех k-разбиений n-мн-ва) на блоки. Чтобы не путать с блоками разбиений n-мн-ва, эти блоки будем наз. классами: $\Sigma_k = \Sigma_k^{(1)} + \Sigma_k^{(2)}$

2) К 1-му классу отнесем все разбиения, содержащие 1-элтный блок $\{n\}$: $|\Sigma_2^{(1)}| = 1$ в примере с $k=2$
$|\Sigma_3^{(1)}| = 3$ в примере с $k=3$

3) Ко 2-му классу отнесем все остальные разбиения, в кот. n является элтом большего (по-крайней мере, $2^х$ элтного) блока. : $|\Sigma_2^{(2)}| = 6$; $|\Sigma_3^{(2)}| = 3$.
входит в блоки, сост-ие как минимум из $2^х$ элтов

4) Подсчитаем теперь число элтов в $\forall$ классе.

а) $|\Sigma_k^{(1)}| = S(n-1,k-1)$ – очевидно: число разбиений оставшихся $(n-1)$ элтов на оставшиеся $(k-1)$ блоков.

б) $|\Sigma_k^{(2)}| = ?$ По сути, мы имеем разбиение $(n-1)$-элтного мн-ва на k блоков с поочередным добавлением элта $\{n\}$ в $\forall$ из k блоков: в примере с $k=3$:

$\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$;
4

в примере с $k=2$:

$\{\{1,2\},\{3\}\}$; $\{\{1,3\},\{2\}\}$, $\{\{2,3\},\{1\}\}$
4 4 4

5. В заключение построим Δк для чисел Ст. 2-го рода на плоск. (n,k): 5