Домашнее задание №3

Группа 504

Количество баллов на зачёт: **8,5**.

1. (1) Сколькими способами можно из 60 различных грибов сделать четыре неразличимые связки по пятнадцать грибов в каждой?

2. (1,5) Найти рекуррентную формулу для вычисления чисел $F(n)$, введенных на занятии.

3. (1,5) Доказать, что для всех $n > 2$ числа Белла $B(n) < n!$.

4. (1) Доказать комбинаторно следующую формулу для чисел Стирлинга $S(n,3)$:
$$S(n,3) = \frac{3^n - 3(2^n - 2) - 3}{6}.$$

5. (1) Решить следующие линейные однородные рекуррентные соотношения второго порядка:
$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, \qquad a_0 = 2, \quad a_1 = 6;$$
$$a_{n+2} = -2a_{n+1} - a_n, \qquad a_0 = 2, \quad a_1 = 6;$$
$$a_{n+2} = 2\sqrt{2}a_{n+1} - 4a_n, \qquad a_0 = 1, \quad a_1 = 2.$$

6. (1,5) Построить общее решение неоднородного рекуррентного соотношения второго порядка
$$a_{n+2} = 5\,a_{n+1} - 4\,a_n + 3 \cdot 2^n.$$

7. (2) Построить общее решение неоднородного рекуррентного соотношения второго порядка
$$a_{n+2} = 3\,a_{n+1} - 2\,a_n + 3 \cdot \sin(n\pi/2).$$

8. (1,5) На плоскости нарисованы n окружностей так, что любая пара окружностей пересекается ровно по двум точкам, и никакие три окружности не имеют общей точки пересечения. Определить количество a_n областей, на которые разбивается плоскость такими окружностями.

9. (2) Рассмотрим плоскость (x,y). Предположим, что мы можем ходить по плоскости, делая шаг вверх (U), шаг вправо (R) и шаг влево (L) на единицу длины так, чтобы шаг R никогда не следовал за шагом L и наоборот. Подсчитать количество a_n таких путей после n шагов.

10. (1) Доказать, что числа Фибоначчи F_n удовлетворяют следующим соотношениям:
$$F_{n+m} = F_{n-1}\,F_m + F_n\,F_{m+1}; \tag{1}$$
$$F_1 + F_3 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}; \tag{2}$$
$$F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n\,F_{n+1}. \tag{3}$$

11. (2) Доказать, что любые два последовательно идущих друг за другом числа Фибоначчи F_n и F_{n+1} взаимно простые.