

Домашнее задание 8. 23.10.14

1. (1) Найдите предел

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(e^n)(\ln n)^n}{n^{-n} e^{n(n/\sqrt{\ln n})} - n e^n \cdot n^{100}}.$$

2. (1) Пусть  $x_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n + \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$ . Найдите  $\overline{\lim} x_n$  и  $\underline{\lim} x_n$ .

Напоминание:  $\frac{1}{n+1} < \ln(1 + 1/n) < \frac{1}{n}$ ,  $(1 + 1/n)^n < e < (1 + 1/n)^{n+1}$ .

3. (2) Докажите, что  $n! > (n/e)^n$ .

4. а)(1,5) Воспользовавшись теоремой Штольца, найдите предел

$$\frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\ln n}.$$

б)(1,5) Найдите предел при условии, что параметр  $\alpha > 0$ ,

$$\frac{\sum_{k=1}^n k^{\alpha k}}{n^{\alpha n}}.$$

5. (4) Последовательность положительных чисел  $a_n$  такова, что  $a_{n+m} \leq a_n + a_m$  для любых  $m, n \in \mathbb{N}$ . Докажите, что последовательность  $\frac{a_n}{n}$  имеет предел.