Домашнее задание №8

Группа 504

Количество баллов на зачёт: **8.5**

1. *(1 балл)* Подсчитать количество гамильтоновых циклов в полном графе K_n, построенном на $n > 2$ вершинах.
2. *(1.5 балла)* Вывести формулу для подсчета общего количества простых циклов в полном графе K_n.
3. *(0.5 балла)* Доказать, что любой турнир T либо сильно связный, либо может быть превращен в таковой изменением ориентации только лишь одного ребра.
4. *(1.5 балла)* Доказать, что любой сильно связный турнир T, построенный на n вершинах, содержит циклы длины $3, 4, \ldots, n$. Следствием этого утверждения является, в частности, тот факт, что в любом сильно связном турнире существует гамильтонов цикл.
5. *(1 балл)* Доказать, что среди $n > 3$ вершин сильно связного турнира T найдутся по крайней мере две вершины x, такие, что орграф $T - x$ остается сильно связным.
6. *(2 балла)* Доказать, что любой турнир имеет нечетное количество гамильтоновых путей.
7. *(0.5 балла)* Доказать, что у k-связного графа, построенного на n вершинах, количество m ребер больше или равно $kn/2$.
8. *(1.5 балла)* Пусть у нас задана тройка натуральных чисел $\kappa < \lambda < \delta$. Привести алгоритм построения графа G, у которого $\kappa(G) = \kappa$, $\lambda(G) = \lambda$, а $\delta(G) = \delta$.
9. *(1.5 балла)* Пусть G есть простой связный граф, в котором $\delta(G) \geq n-2$, где n — количество вершин в графе. Доказать, что в этом случае $\kappa(G) = \delta(G)$. Предъявить для любого $n > 3$ граф с $\delta(G) = n - 3$, у которого $\kappa(G) < \delta(G)$.
10. *(1.5 балла)* Пусть G есть простой связный граф, построенный на n вершинах, в котором $\deg(x) + \deg(y) \geq n - 1$ для любой пары несмежных между собой вершин x и y. Доказать, что в этом случае $\lambda(G) = \delta(G)$.
11. *(1.5 балла)* Пусть G есть простой связный граф, в котором $\delta(G) \geq (n + k - 2)/2$, где n — количество вершин в графе, $n \geq k + 1$. Доказать, что в этом случае G является k-связным графом, то есть что $\kappa(G) \geq k$.