Формула Эйлера.

1 апреля 2017 г.

1. Доказать, что в случае плоского графа, имеющего ровно k связных компонент, формула Эйлера принимает вид
$$n - m + r = k + 1.$$

2. Предположим, что граф G имеет 100 вершин и 300 ребер. Является ли он планарным?

3. Выразить количество m ребер через количество n вершин в произвольном самодвойственном плоском графе, то есть графе, для которого $\tilde{G} \cong \tilde{G}^*$.

4. Доказать, что в случае простого планарного двудольного графа G, построенного на n вершинах, количество m ребер ограничено сверху величиной $2n - 4$. Верно ли, что эта же оценка верна для более широкого класса графов? И как использовать эту оценку для доказательства непланарности графа $K_{3,3}$?

5. Доказать равенство $\mathrm{cr}(\mathrm{K}_6) = 3$ с помощью теоремы Эйлера.

6. Пусть G есть планарный 4-регулярный граф, построенный на 16 вершинах. Предположим, что его правильное вложение в плоскость состоит только из треугольных и/или четырехугольных граней. Сколько треугольных и сколько четырехугольных граней имеет такое вложение?

7. Пусть T есть дерево на $n > 2$ вершинах. Сколько ребер нужно к нему добавить, чтобы получился максимальный планарный граф?

8. Показать, что средняя степень вершин в планарном графе меньше шести.

9. Рассмотрим максимальный планарный граф G, построенный на $n \geq 4$ вершинах и m ребрах. Обозначим через n_i количество вершин степени i. Доказать, что для чисел n_i выполняется равенство

$$3n_3 + 2n_4 + n_5 = 12 + n_7 + 2n_8 + 3n_9 + 4n_{10} + \ldots.$$

Используя это равенство, доказать, что в графе G имеются по меньшей мере четыре вершины, степени которых не превосходят пяти.

10. Доказать, что толщина любого 4-регулярного графа меньше или равна двум.

11. Доказать, что для двудольного графа $K_{s,t}$ справедлива следующая оценка на его толщину:

$$t(K_{s,t}) \geq \frac{st}{2s + 2t - 4}.$$

12. Говорят, что граф G представляет собой правильный многогранник, если это есть простой d-регулярный граф, $d \geq 3$, у которого степени всех граней одинаковы и равны s. Доказать, что существует всего пять таких многогранников, отвечающих пяти платоновым телам.