

ДЗ на 9 октября

- 1) Даны два ортонормированных базиса в евклидовом пространстве. Докажите, что сумма квадратов косинусов углов между ними равна размерности.
- 2) Рассмотрим эрмитово пространство комплексных матриц порядка n со скалярным произведением $(X, Y) = \text{Tr}(X^T \bar{Y})$. Найдите в нём ортогональное дополнение а) матриц с нулевым следом б) верхних треугольных.
- 3) Докажите, что определитель матрицы Грама системы не превосходит произведения квадратов длин её векторов.
- 4) Докажите, что если в n - мерный куб можно вершинно вписать правильный тетраэдр, то в $2n - 1$ -мерный тоже можно.
- 5) Докажите, что многочлен $x_1^2 + \dots + x_n^2$ не представим в виде суммы меньшего количества квадратов вещественных многочленов.
- 6) Докажите, что в любых двух подпространствах евклидова пространства можно выбрать ортогональные базисы так, чтобы элементы разных базисов с неравными номерами были также ортогональны.