NP трудные задачи

Задача поиска

Пространство поиска $\sim 2^n$
Сложно алгоритм $O(poly(n)) = n^{O(1)}$
Эффективные алгоритмы.

Задача поиска: (Search Problem)

Определяется предикатом $C(I, S)$,
где I – условие/вход задачи
S – решение
$C(I,S) = true \iff S$ – решение для I

| Будем требовать, что бы $C(I,S)$ можно было вычислить за $n^{O(1)}$ (т.е. эффект.)

Задача разрешения: (Decision Problem)

Решение: 0, 1
$1 \iff \exists S : C(I,S) = true$

Задача выполнимости: Satisfiability SAT

Вход: формула φ в КНФ

литерал, клоз, дизъюнкт

φ: $(x \vee y \vee z) \wedge (x \vee \bar{y}) \wedge (y \vee \bar{z}) \wedge (z \vee \bar{x}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$

Выход: значение переменных σ $\varphi(\sigma) = true$

$\sigma : \varphi(\sigma) = true \Rightarrow \sigma$ - выполняющий набор.

$\exists A$ решает decision problem для SAT

B – решает search problem:

$A(\varphi) = 1 \to A(\varphi[x=0]) = 1 \ldots\ldots \quad \ldots \quad A(\varphi[x=0, y=1, \ldots])$
$A(\varphi[x=1])$ $\quad - - - -$

$0 \to 0$

Факт: решать SAT быстрее 2^n никто не умеет. $O(2^n \cdot poly(n))$

$O(n)$ $\begin{cases} \text{Хорновские формулы.} \\ \text{2SAT (} \forall \text{ клоз содержит 2 литерала)} \end{cases}$

3SAT $O(2^{cn})$

TSP // MST

Вход: полный взвешенный граф и число k

Выход: Путь по всем верш. веса $\leq k$

Hamilton Cycle (Rudrata Cycle) // Euler

Вход: граф

Выход: Цикл по всем вершинам, причем $\forall$ только 1 раз

Balanced Cut // Min Cut

Вход: взвешенный граф.

Выход: разрез мин. веса: $V = S \sqcup \bar{S}$

$\frac{1}{3}|V| \leq |S| \leq \frac{2}{3}|V|$

Integer Linear Programming // LP

Вход: $A, b, \bar{c}$

Выход: $A\bar{x} < b, \quad \bar{c}\bar{x} \geq g$

матрица $n \times m$ с $\mathbb{Z}$ значениями

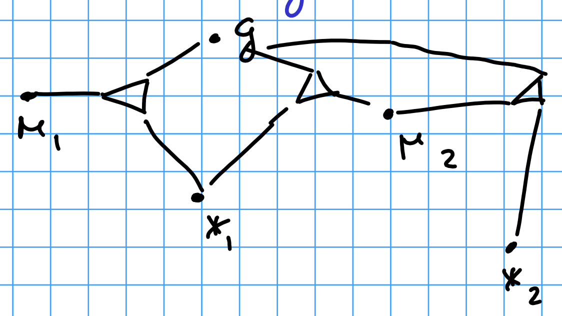
ZOE Zero-one equations

Вход: $A \in \{0,1\}^{m \times n}$ Выход: $\bar{x}$: $A\bar{x} = \bar{1}$

$x \in \{0,1\}^n$

3D Matching

// Matching



Independent Set

// IS in trees

Вход: Граф и число g

Выход: $I \subseteq V$: $\forall v, u \in I \quad (v,u) \notin E$

$|I| = g$

Vertex Cover

// VC in trees

Вход: Граф и число g

Выход: $S \subseteq V$: $\forall (v,u) \in E$

$|S| = g \qquad v \in S \vee u \in S$

Set Cover

Вход: $\{S_i\}$: $\bigcup_i S_i = S$, g.

Выход: I : $\bigcup_{i \in I} S_i = S$, $|I| = g$

Clique

Вход: Граф и k

Выход: полный подграф на k верш.

Longest Path

// Shortest Path

Вход: Граф, s, t, k

Выход: путь $s \leadsto t$ веса $\geq k$

Задача о рюкзаке (Knapsack)

// Unary Knapsack

$O(n\underline{W})$ ← вместимость

Subset Sum

Вход: S, k

Выход: $M \subseteq S : \sum\limits_{a \in M} a = k$

P vs NP

P – класс задач поиска, решаемых за $n^{O(1)}$

NP – класс задач поиска

$P \subseteq NP$

$P \stackrel{?}{=} NP \qquad NP \stackrel{?}{=} coNP$

$NP \neq coNP \Rightarrow P \neq NP$

Сведение:

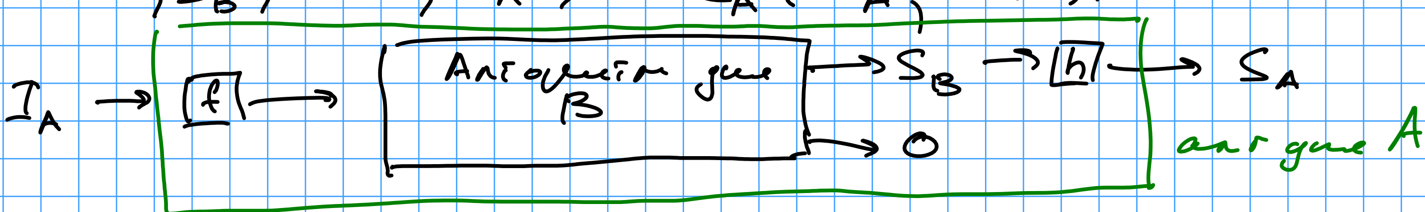
$A \to B$ // $A \leq B$, сведение по Карпу, много-одно сведение

$\exists f, h$ – полин. вычисл. функции

$\forall I_A \; \exists S_A : C_A(I_A, S_A) \Leftrightarrow \exists S_B : C(f(I_A), S_B)$

$f: \{I_A\} \to \{I_B\} \qquad C_B(f(I_A), S) \Rightarrow$

$h: \{S_B\} \to \{S_A\} \qquad C_A(I_A, h(S))$



Св-ва:

1. B решается за $n^{O(1)}$ $\Rightarrow$ A тоже решается за $n^{O(1)}$

2. $A \to B$, $B \to C$: $A \to C$

$\equiv$ A - NP трудная $\Leftrightarrow$ $\forall B \in NP$

$B \to A$

$\equiv$ A - NP полная $\Leftrightarrow$ A - NP трудная и $A \in NP$

Задачи из $NP \setminus P$, но не NPC, но сложные

Factoring

Вход: n

Выход: p, q : $n = p \cdot q$

Graph Isomorphism

Вход: G_1, G_2

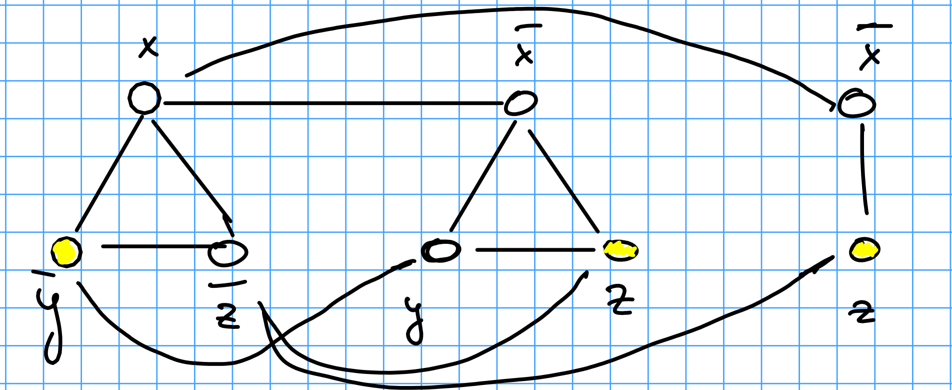
Выход: биекция вершин зад. изоморф.

Сведения:

$3SAT \to IS$

$\sigma = (x, \bar{y}, z)$

$(x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee z)$



$k = n$

A – NP полная:

1. $A \in NP$

2. Будь B – NP-полную

$$B \to A$$

SAT → 3SAT

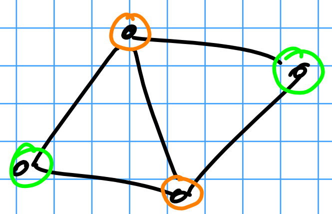
$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \ \dots \ \vee x_n) \wedge \dots$$

$$\downarrow$$

$$(x_1 \vee x_2 \vee y_1) \wedge (\bar{y}_1 \vee x_3 \vee y_2) \wedge (\bar{y}_2 \vee x_4 \vee y_3) \dots$$

$$\dots \wedge (\bar{y}_{n-3} \vee x_{n-1} \vee x_n)$$

IS → VC



$$IS((V,E),k) \to$$

$$VC((V,E),|V|-k)$$

IS → Clique

$$IS((V,E),k) =$$

$$Clique((V,\bar{E}),k)$$

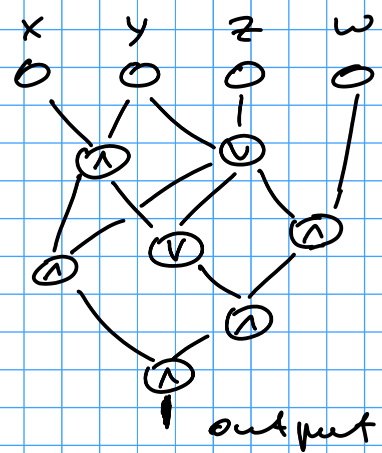
Теорема Кука-Левина

$\forall$ NP задачу → Circuit SAT

Circuit SAT:

Вход: Булева схема

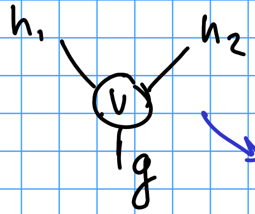
Виход: виконуючий набір.



NP-задача $\Rightarrow \exists\ C(I,S)$ - предикат и алгоритм $\underbrace{A_C(I,S)}$ вычисл. C

$A_C(I,\cdot) \longrightarrow$ схема ("на пальцах")

Circuit SAT $\to$ SAT



$$(g \vee \bar{h}_1) \wedge (g \vee \bar{h}_2) \wedge (\bar{g} \vee h_1 \vee h_2)$$

CircuitSAT $\to$ SAT $\to$ 3SAT $\to$ IS $\to$ VC, IS $\to$ Clique

Решение NP-трудных задач:

1. Эвристический
   - поиск с возвратом   SAT solvers
   - метод ветвей и границ
   - локальный поиск
2. Приближенное решение
   - $\log(n)$ прибл. для Set Cover
   - 1.5 для MTSP (с нер-ом Δ)
   - 2 приближ для VC
   - не $\exists$ конст. приближ TSP // $P \neq NP$