Задания

28 апреля 2017 г.

1. Определите структуру монады на функторе $Term_\Sigma$ для любой сигнатуры Σ.

2. Определите регулярную теорию, моделями которой являются малые категории.

3. Докажите, что лемму о подстановке для $\wedge$: для любых формул φ и ψ, таких что $FV(\varphi) \cup FV(\psi) \subseteq \{x_1, \ldots x_n\}$, и всех термов $t_1, \ldots t_k$ верно, что $[\![(\varphi \wedge \psi)[x_1 := t_1, \ldots x_n := t_n]]\!]$ является пулбэком $[\![\varphi \wedge \psi]\!]$ вдоль $\langle t_1, \ldots t_n \rangle$. Можно пользоваться тем, что это верно для φ и ψ (по индукционной гипотезе).

4. Пусть $\mathbf{C}$ – конечно полная категория. Тогда для любого морфизма $f : A \to B$ можно определть функтор $f^* : Sub(B) \to Sub(A)$, где $Sub(X)$ – полная подкатегория $\mathbf{C}/X$, объекты которой – это стрелки $Y \to X$, являющиеся мономорфизмами. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

   (a) У любого морфизма $f : A \to B$ существует образ $im\, f \hookrightarrow B$.

   (b) Для любого морфизма $f : A \to B$ у функтора f^* есть левый сопряженный функтор $\exists_f : Sub(A) \to Sub(B)$.