ДЗ 2. Расстояния в евклидовых пространствах

Мы начали обсуждение с понятия аффинного пространства, как формализации аналога векторного пространства без начала отсчёта. Впрочем, чтобы потом про него забыть и работать только с векторными пространствами. Евклидово пространство — это пространство со скалярным произведением.

В евклидовом пространстве имеет место неравенство:

$$\langle u, v\rangle \leq \|u\|\|v\|.$$

Называется неравенство Коши-Буняковского.

Начав развивать бескоординатный (без начала отсчёта) подход мы пришли к определению аффинного подпространства.

Определение 1. V — векторное пространство, $A \subseteq V$. A называется аффинным подпространством, если A имеет вид $A = L + x_0$, где L — линейное подпространство, $x_0 \in A$.

Факт. Линейное подпространство L из определения задано однозначно. В качестве x_0 можно взять любую точку A.

Определение 2. Раз так, то положим $\dim A = \dim L$.

Определение 3. Пусть $x_1, \ldots, x_n \in V$, и даны числа $\lambda_i \in K$, что $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Тогда аффинной комбинацией называется элемент $v \in V$ $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$.

Факт. Пусть $A \subseteq V$. Тогда A — аффинное подпространство тогда и только тогда, когда $\forall x, y \in A$ $\forall t \in K$

$$(1-t)x + ty \in A.$$

Замечание. Вообще аналогичное утверждение можно доказать и над полем характеристики 2, если вместо аффинной комбинации двух точек разрешить аффинную комбинацию 3-ёх точек.

Наша задача — посчитать расстояние между аффинными подпространствами A_1 и A_2. Попробуем это сделать. Прежде всего заметим, что если $\dim A_1 + \dim A_2 > \dim V$, то расстояние 0, так как подпространства пересекаются.

Теперь представим $A_1 = L_1 + x$ и $A_2 = L_2 + y$.

Факт. $\rho(A_1, A_2) = \rho(x - y, L_1 + L_2)$. То есть задача сводится к ранее разобранной.

Определение 4. V — векторное пространство, $A_1 = L_1 + x_0$, $A_2 = L_2 + x_0$ — аффинные подпространства в V. Пусть $\dim A_1 + \dim A_2 \leq \dim V$. Определим косинус угла $\angle A_1, A_2$ как

$$\cos\angle A_1, A_2 = \sup_{\substack{0\neq x\in L_1\\ 0\neq y\in L_2}} \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}.$$

То есть мы ищем минимальный угол.

Факт. Рассмотрим отображение $pr = pr_{V\to L_2}|_{L_1} \colon L_1 \to L_2$. Тогда при фиксированном x минимальный угол будет достигаться между ним и его проекцией. Следовательно

$$\cos\angle A_1, A_2 = \sup_{0\neq x\in L_1} \frac{\|pr(x)\|}{\|x\|}.$$

Это задача максимизации квадратичной формы, которую мы обсудим в следующий раз.

Задачи

Задача 1. Пусть K – поле, V – векторное пространство над K. Пусть $X \subseteq V$. Покажите, что

$$aff(X) = \{v \in V \,|\, \exists x_1, \ldots, x_n \in X \text{ и } \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K, \text{ что } v = \sum \lambda_i x_i\}$$

является наименьшим аффинным подпространством содержащим X. Такое подпространство называется аффинной оболочкой X.

Задача 2. Посчитайте расстояние и косинус угла между аффинными подпространствами $\langle u, v\rangle + x_0$ и $\langle w\rangle + y_0$ в $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением, если

$$x_0 = (1, 0, 1, 1),\ u = (1, -1, 0, 1),\ v = (0, 0, 0, 1),\ y_0 = (1, -1, 2, 1),\ w = (1, 0, 1, 0).$$

Задача 3. Найти косинус угла между диагональю n-мерного куба и его k-мерной гранью.

Попробуем обобщить определение угла.

Определение 5. Пусть L_1 и L_2 два линейных подпространства и $U = L_1 \cap L_2$. Определим угол между ними, как угол, между $M_1 = \{x \in L_1 \,|\, x \in U^{\perp}\}$ и $M_2 = \{x \in L_2 \,|\, x \in U^{\perp}\}$.

Задача 4. Рассмотрим две гиперплоскости $\langle a, x\rangle = 0$ и $\langle b, x\rangle = 0$. Найдите угол между ними.

Задача 5 (2 балла)**.** Пусть даны вектора $x_1, \ldots, x_k \in V$. Доказать, что если каждая пара различных векторов из набора образует тупой угол, то $k \leq 1 + \dim V$.