Комбинаторный смысл основных операций над производящими функциями. Экспоненциальная и композиционная формулы

1 Комбинаторный смысл сложения и умножения производящих функций

1. Пусть теперь X , Y — пара конечных или счетных множеств, и пусть каждому из этих множеств поставлены в соответствие обыкновенные ($f(z)$ и $g(z)$) или экспоненциальные ($h(z)$ и $G(z)$) производящие функции. Так как производящие функции являются элементами кольца формальных степенных рядов, то их можно складывать и перемножать между собой. Эти формальные операции имеют вполне определенный комбинаторный смысл, к изучению которого мы и перейдем.

Вначале разберем комбинаторный смысл сложения пары экспоненциальных или обыкновенных производящих функций.

1.1. `Пример 1.` Пусть X есть счетное множество всех *связных* графов. Приписывая любому такому графу, построенному на n-элементном множестве U_n вершин, вес $z^n/n! \in \mathbb{C}_e[[z]]$, мы сопоставляем множеству X экспоненциальную производящую функцию

$$h(z) = a_0 + a_1\frac{z}{1!} + a_2\frac{z^2}{2!} + \ldots + a_n\frac{z^n}{n!} + \ldots,$$

коэффициенты a_n которой описывают количество всех связных графов, которые мы можем построить на n-элементном множестве U_n .

Далее, пусть Y есть счетное множество всех *несвязных* графов, и пусть любому такому графу, построенному на n-множестве вершин U_n , также приписывается вес $z^n/n! \in \mathbb{C}_e[[z]]$. Тем самым мы ставим в соответствие множеству Y экспоненциальную производящую функцию

$$G(z) = b_0 + b_1\frac{z}{1!} + b_2\frac{z^2}{2!} + \ldots + b_n\frac{z^n}{n!} + \ldots,$$

коэффициенты которой подсчитывают количество всех возможных способов построить несвязный граф на n-элементном множестве вершин U_n .

Теперь практически очевидно, что производящая функция

$$H(z) = h(z) + G(z) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\frac{z}{1!} + (a_2 + b_2)\frac{z^2}{2!} + \ldots + (a_n + b_n)\frac{z^n}{n!} + \ldots$$

соответствует счетному множеству Z всех графов, а ее коэффициенты $c_n = a_n + b_n$ описывают общее количество всех (и связных, и не связных) графов, построенных на n-множестве U_n .

1.2. Аналогичный комбинаторный смысл имеет операция сложения пары производящих функций и в общем случае. Именно, пусть у нас имеется пара *непересекающихся* множеств X и Y каких-то дискретных структур. Пусть, далее, каждому из этих множеств поставлена в соответствие некоторая производящая функция. Тогда сумма этих функций описывает множество Z , представляющее собой объединение множеств X и Y, а коэффициенты $c_n = a_n + b_n$ этой суммы подсчитывают общее количество дискретных структур (т.е. структур, принадлежащих как множеству X, так и множеству Y), которых мы можем построить на некотором n-элементном множестве U_n.

2. Несколько более нетривиальна комбинаторная интерпретация произведения пары экспоненциальных производящих функций

$$h(z) = a_0 + a_1\frac{z}{1!} + a_2\frac{z^2}{2!} + \dots \qquad \text{и} \qquad G(z) = b_0 + b_1\frac{z}{1!} + b_2\frac{z^2}{2!}.$$

2.1. Напомним, что произведением этих функций называется формальный степенной ряд $H(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ вида

$$H(z) = h(z)\cdot G(z) = c_0 + c_1\frac{z}{1!} + c_2\frac{z^2}{2!} + \dots, \qquad \text{где} \qquad c_n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a_i b_{n-i}. \tag{1}$$

Комбинаторный смысл этой операции следующий. Пусть a_n — это количество способов совершить какое-то комбинаторное действие или построить какую-либо дискретную структуру на n-элементном множестве U_n, b_n — это количество способов совершить еще какое-то комбинаторное действие или построить еще какую-либо дискретную структуру на том же самом n-множестве U_n. Тогда c_n есть количество способов совершить следующие комбинаторные действия: разбить всеми возможными способами n-множество U_n на два упорядоченных, возможно пустых, блока мощностью i и $(n-i)$ соответственно, совершить над i элементами первого блока первое комбинаторное действие a_i способами, а затем совершить над оставшимися $(n-i)$ элементами второго блока второе комбинаторное действие b_{n-i} способами.

Действительно, для любого фиксированного $i = 0, 1, \dots, n$ мы можем $\binom{n}{i}$ способами выбрать элементы первого блока; оставшиеся $(n-i)$ элементов второго блока выбираются при этом однозначно. Пусть для какого-то фиксированного разбиения мы a_i способами совершаем первое комбинаторное действие над элементами первого блока, и b_{n-i} способами совершаем второе комбинаторное действие над элементами второго блока. Тогда, согласно правилу произведения, мы для данного разбиения имеем $a_i b_{n-i}$ способов совершить оба этих действия. Меняя теперь i в диапазоне от нуля до n, мы и получаем, что общее количество способов совершить описанные выше действия равно

$$c_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{i}a_i b_{n-i}.$$

2.2. `Пример 2.` Пусть у нас в аудитории имеется n студентов. Предположим, что нам нужно как-то разбить это множество студентов на две подгруппы, одну из них оставить в этой аудитории слушать лекцию, а вторую отправить в соседнюю аудиторию решать задачи. При этом во второй подгруппе нам нужно выбрать одного из студентов сходить за ключом от той аудитории, в которой подгруппа будет заниматься. Спрашивается, сколько существует возможных способов совершить эти действия.

Решим эту задачу с помощью производящих функций. Над студентами первой подгруппы мы никаких дополнительных действий не совершаем, поэтому $a_n = 1$. Во второй подгруппе нам нужно выбрать одного студента, который пойдет за ключом. Это можно сделать $b_n = n$ способами. Поэтому

$$h(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots = e^z, \qquad G(z) = 0 + 1 \cdot \frac{z}{1!} + 2 \cdot \frac{z^2}{2!} + \ldots = z \cdot e^z.$$

Следовательно,

$$H(z) = h(z) \cdot G(z) = z \cdot e^{2z} = z + 2\frac{z^2}{1!} + 2^2\frac{z^3}{2!} + \ldots \qquad \Longrightarrow \qquad c_n = n \cdot 2^{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Заметим в заключение, что мы тем самым еще раз доказали следующее тождество для биномиальных коэффициентов:

$$\sum_{i=1}^{n} i \binom{n}{i} = n\, 2^{n-1}.$$

`Упражнение 1.` Дать прямое комбинаторное доказательство полученного результата, т.е. доказать комбинаторно, что количество способов совершить все эти действия равно $n\, 2^{n-1}$ для всех $n = 1, 2, \ldots$

2.3. `Пример 3.` Рассмотрим множество S всех перестановок. Известно, что количество c_n перестановок n-элементного множества $U_n = [n]$ чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$ равно $n!$. Следовательно, экспоненциальная производящая функция для множества S имеет вид

$$S(z) = 1 + 1!\frac{z}{1!} + 2!\frac{z^2}{2!} + \ldots = 1 + z + z^2 + \ldots = \frac{1}{1-z}.$$

Пусть σ_n есть некоторая произвольная перестановка элементов множества $[n]$. В этой перестановке i чисел, $i = 0, 1, \ldots, n$, остаются неподвижными, а остальные $(n-i)$ элементов меняют свое положение. Пусть D_n есть количество перестановок рассматриваемого множества $[n]$, в которых все элементы меняют свое положение, a_n — количество перестановок, при котором все элементы остаются на месте. Очевидно, что $a_n = 1$ для любого n. Постараемся найти явное выражение для чисел D_n.

Введем для этого экспоненциальные производящие функции

$$E(z) = 1 + 1\frac{z}{1!} + 1\frac{z^2}{2!} + \ldots = e^z \qquad \text{и} \qquad D(z) = D_0 + D_1\frac{z}{1!} + D_2\frac{z^2}{2!} + \ldots,$$

отвечающие числовым последовательностям $a_n = 1$ и D_n. В соответствии с комбинаторным смыслом произведения таких функций имеем

$$S(z) = E(z) \cdot D(z) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{1-z} = e^z \cdot D(z).$$

Следовательно,

$$D(z) = \frac{e^{-z}}{1-z},$$

откуда сразу же получается явное выражение для чисел d_n:

$$D_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)! = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right). \tag{2}$$

2.4. *Замечание.* Задача определения чисел D_n в элементарной комбинаторике известна как задача о беспорядках. Она достаточно часто встречается в различных школьных олимпиадных задачах по математике в самых разнообразных формулировках. Одна из возможных ее переформулировок такова. Преподаватель проводит тестирование n студентов, а затем просит студентов обменяться ответами и проверить эти тесты так, чтобы никто не проверял свою собственную работу. В этом случае D_n есть количество возможных способов совершить эти действия.

Исторически впервые эти числа появились в 1708 году в работах французского математика Пьера Монмора. Монмор рассматривал две колоды карт, по n штук карт в каждой колоде, и поставил задачу о подсчете раскладок карт во второй колоде, при которых они бы не повторялись с картами первой колоды при смещении обеих колод на любое, но одинаковое количество карт (так называемая задача о смещениях — displacements problem).

`Упражнение 2.` Доказать формулу (2) для чисел D_n с использованием принципа включений-исключений.

Свойства чисел D_n напоминают свойства обычного факториала. Так, например, числа D_n удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению:

$$D_{n+1} = n\,(D_n + D_{n-1}) \quad \forall\ n > 1; \qquad\qquad D_0 = 1, \quad D_1 = 0. \tag{3}$$

Это же рекуррентное соотношение, но с другими начальными условиями, выполняется и для обычных факториалов:

$$(n+1)! = n(n! + (n-1)!), \quad \forall\ n > 1; \qquad\qquad 0! = 1, \quad 1! = 1.$$

Дональд Кнут [1] в этой связи предложил называть эти числа субфакториалами и ввел для них обозначение $D_n \equiv !n$.

`Упражнение 3.` Дать комбинаторное доказательство рекуррентного соотношения (3).

2.5. В дальнейшем нам, наряду с произведением пары экспоненциальных производящих функций, понадобятся как формулы, так и комбинаторный смысл произведения нескольких $(k \geqslant 2)$ таких функций.

Определение. Произведением k экспоненциальных производящих функций

$$h_m(z) = a_{0_m} + a_{1_m}\frac{z^1}{1!} + a_{2_m}\frac{z^2}{2!} + \ldots, \qquad m = 1, 2, \ldots, k$$

называется формальный степенной ряд вида

$$H(z) = h_1(z) \cdot h_2(z) \cdot \ldots \cdot h_k(z) = c_0 + c_1\frac{z^1}{1!} + c_2\frac{z^2}{2!} + \ldots,$$

в котором коэффициенты c_n вычисляются по формулам

$$c_n = \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_k=n,\\ 0\leqslant i_m\leqslant n}} \binom{n}{i_1}\binom{n-i_1}{i_2}\ldots\binom{n-i_1-i_2-\ldots-i_{k-1}}{i_k} a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_k} =$$

$$= \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_k=n,\\ 0\leqslant i_m\leqslant n}} \frac{n!}{i_1!i_2!\ldots i_k!} a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_k}.$$

Комбинаторный смысл этого действия достаточно очевиден. Мы берем n-элементное множество, разбиваем его на k упорядоченных, возможно пустых, блоков, и над элементами m-го блока, $m \in \{1, \ldots, k\}$ совершаем m-е комбинаторное действие a_{i_m} числом способов. Общее количество способов совершить все эти операции и равно c_n.

3. Перейдем теперь к комбинаторной интерпретации произведения обыкновенных производящих функций. Напомним, что произведением пары таких функций

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots,$$

$$g(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_n z^n + \ldots.$$

называется формальный степенной ряд вида

$$h(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots, \qquad \text{где} \qquad c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}. \tag{4}$$

В случае k таких функций

$$f_m(z) = a_{0_m} + a_{1_m} z + a_{2_m} z^2 + \ldots, \qquad m = 1, 2, \ldots, k$$

их произведением является функция

$$h(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots,$$

коэффициенты c_n в которой рассчитываются по формуле

$$c_n = \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_k=n,\\ 0\leqslant i_m\leqslant n}} a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k}.$$

3.1. Наиболее часто встречающейся на практике комбинаторной интерпретацией этих произведений является формулировка, связанная с комбинаторными действиями над неразличимыми предметами. Именно, пусть имеется n неразличимых предметов, и пусть a_n и b_n есть количество способов совершить над этими предметами какие-то комбинаторные действия. Тогда c_n перечисляет все возможные способы разбиения совокупности n неразличимых предметов на два различимых, возможно пустых, блока, совершения над i элементами, попавшими в первый блок, первого комбинаторного действия (a_i способами), а над элементами, попавшими во второй блок, второго комбинаторного действия (b_{n-i} способами). Обобщение этой интерпретации на случай произведения k обыкновенных производящих функций очевидно.

Самой простой, но в то же время важной задачей, связанной с такого рода интерпретацией произведения обыкновенных производящих функций, является задача о раскладке n неразличимых предметов по k различимым ящикам. В качестве основной производящей функции в этой задаче выступает обыкновенная производящая функция

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots,$$

коэффициенты a_n которой имеют следующий комбинаторный смысл: $a_n = 1$, если нам разрешено положить n предметов в выбранный ящик, и $a_n = 0$ в случае, если нам это делать запрещено. Например, производящая функция вида

$$f_{\leqslant 1}(z) = 1 + z$$

означает, что в выбранный ящик я могу либо ничего не положить $(a_0 = 1)$, либо положить ровно один из n неразличимых предметов $(a_1 = 1)$. Равенство нулю коэффициентов a_n, $n > 1$ означает, что в ящике запрещается размещать два и более предметов. Производящая функция вида

$$f_{\geqslant 1}(z) = z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots$$

отвечает ситуации, когда в ящик я обязан положить хотя бы один предмет. Наконец, функция

$$f(z) = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots$$

описывает ситуацию, при которой всякие ограничения на количество шаров в ящике отсутствуют.

Тогда, например, в соответствии с комбинаторным смыслом произведения k обыкновенных производящих функций, коэффициенты c_n обыкновенной производящей функции, отвечающей произведению k функций $f_{\leqslant 1}(z)$, дают нам количество способов раскладки n неразличимых предметов по k различимым ящикам при условии, что ни в один из этих ящиков я не могу положить более одного предмета. Эти коэффициенты определяются из формулы

$$h(z) = f^k_{\leqslant 1}(z) = (1 + z)^k = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} z^n \qquad \Longrightarrow \qquad c_n = \binom{k}{n}.$$

В случае отсутствия ограничений на количество предметов в одном ящике аналогичные рассуждения дают производящую функцию

$$h(z) = f^k(z) = (1 + z + z^2 + \ldots)^k = \frac{1}{(1-z)^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\!\binom{k}{n}\!\right) z^n \qquad \Longrightarrow \qquad c_n = \left(\!\binom{k}{n}\!\right).$$

Наконец, в случае, когда в каждый ящик нам необходимо положить хотя бы один предмет, имеем

$$h(z) = f^k_{\geqslant 1}(z) = (z + z^2 + \ldots)^k = \frac{z^k}{(1-z)^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\!\binom{k-n}{n}\!\right) z^n \quad \Longrightarrow \quad c_n = \left(\!\binom{k-n}{n}\!\right) = \binom{n-1}{k-1}.$$

Мы продемонстрировали, как с помощью описанного выше подхода решаются три основные наши задачи о раскладке n неразличимых предметов по k различимым ящикам. Однако, пользуясь этим подходом, мы довольно просто можем решать и множество других, самых разнообразных задач того же рода.

`Пример 4.` Решим задачу раскладки n неразличимых предметов по трем ящикам при условии, что в первый ящик я могу положить ровно один предмет, во второй — не более одного предмета, а в третий — два, четыре или пять предметов. Это означает, что

$$f_1(z) = z, \qquad f_2(z) = 1 + z, \qquad f_3(z) = z^2 + z^4 + z^5,$$

а для определения общего количества способа раскладки n неразличимых предметов по этим ящикам нам необходимо вычислить произведение

$$h(z) = f_1(z) \cdot f_2(z) \cdot f_3(z) = z(1 + z)(z^2 + z^4 + z^5) = z^3 + z^4 + z^5 + 2z^6 + z^7.$$

Отсюда, в частности, следует, что семь предметов в эти ящики я могу разложить лишь одним способом.

`Упражнение 4.` Поступающий в университет должен сдать четыре различных экзамена. Сколько есть вариантов успешно сдать экзамены и поступить, если проходной балл равен семнадцати?

3.2. Заметим сразу же, что использование экспоненциальной производящей функции

$$F(z) = a_0 + a_1\frac{z}{1!} + a_2\frac{z^2}{2!} + \ldots + a_n\frac{z^n}{n!} + \ldots,$$

коэффициенты которой имеют тот же комбинаторный смысл, что и у функции $f(z)$ предыдущего пункта, позволяет столь же эффективно решать аналогичные задачи о раскладке n *различимых* предметов по k различимым ящикам. Рассмотрим, к примеру, производящую функцию

$$F_{\leqslant 1}(z) = 1 + \frac{z}{1!} = 1 + z.$$

Она описывает ситуацию, когда в один ящик я могу положить не более одного предмета. Тогда количество способов раскладки n различимых предметов по k различимым же ящикам при наличии такого ограничения на количество предметов в ящике определяется как коэффициент c_n при $z^n/n!$ в разложении функции $H(z) = [F_{\leqslant 1}(z)]^k$:

$$H(z) = [F_{\leqslant 1}(z)]^k = (1+z)^k = 1 + k\frac{z}{1!} + k(k-1)\frac{z^2}{2!} + \ldots + k(k-1)\ldots(k-n+1)\frac{z^n}{n!} + \ldots + z^k =$$

$$= \sum_{n=0}^{k} (k)_n \frac{z^n}{n!} \qquad \Longrightarrow \qquad c_n = (k)_n = k(k-1)\ldots(k-n+1).$$

Использование производящей функции вида

$$F(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = e^z$$

позволяет легко решить задачу о количестве способов раскладки n различимых предметов по k различимым ящикам при отсутствии ограничений на количество предметов в каждом ящике: возводя эту функцию в k-ю степень, имеем

$$H(z) = [F(z)]^k = e^{kz} = \sum_{n=0}^{+\infty} k^n \frac{z^n}{n!} \qquad \Longrightarrow \qquad c_n = k^n.$$

Наконец, возводя функцию

$$F_{\geqslant 1}(z) = \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = e^z - 1$$

в k-ю степень и используя бином Ньютона, мы легко можем получить явное выражение для числа $\widehat{S}(n,k)$ способов раскладки n различимых предметов по k различимым ящикам при условии, что в любом ящике должен находиться хотя бы один предмет. Действительно,

$$H(z) = [F_{\geqslant 1}(z)]^k = (e^z - 1)^k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} e^{(k-i)z}.$$

Учитывая, что

$$e^{(k-i)z} = 1 + (k-i)\frac{z}{1!} + (k-i)^2\frac{z^2}{2!} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} (k-i)^n \frac{z^n}{n!},$$

окончательно получаем

$$H(z)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}\Big[\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n\Big]=\sum_{n=0}^{+\infty}\widehat{S}(n,k)\frac{z^n}{n!}\qquad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\qquad \widehat{S}(n,k)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n.$$

Более того, мы теперь, как и в случае раскладки неразличимых предметов, можем решать с помощью этой техники и довольно сложные задачи смешанного типа.

`Пример 5.` Определить количество способов раскладки n различимых предметов по четырем ящикам при условии, что во второй ящик разрешается класть только четное, а в четвертый — только нечетное число предметов.

`Решение.` В этом случае

$$F_1(z)=F_3(z)=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots=e^z,$$

$$F_2(z)=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots+\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\frac{e^z+e^{-z}}{2},$$

$$F_4(z)=\frac{z}{1!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots+\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\frac{e^z-e^{-z}}{2},$$

поэтому

$$H(z)=e^{2z}\frac{e^z+e^{-z}}{2}\frac{e^z-e^{-z}}{2}=\frac{1}{4}\left(e^{4z}-1\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}4^{n-1}\frac{z^n}{n!}\qquad\Longrightarrow\qquad c_n=4^{n-1},\quad n=1,2,\ldots$$

`Упражнение 5.` Получить ответ без использования производящих функций, используя прямые комбинаторные рассуждения.

3.3. Вернемся к комбинаторному смыслу произведения обыкновенных производящих функций. Существует еще одна полезная комбинаторная интерпретация произведения таких функций, связанная с *линейно упорядоченными* множествами различимых элементов. Именно, пусть X есть n-элементное упорядоченное множество (дни в календаре, люди в очереди, солдаты в строю). В этом случае разбить его на два упорядоченных блока, один из которых состоит из первых i элементов X, а второй — из оставшихся $(n-i)$ элементов можно, как и в случае неразличимых элементов, лишь одним способом. Если теперь над элементами первого блока совершить комбинаторное действие a_i способами, а над элементами второго — комбинаторное действие b_{n-i} способами, то при заданном разбиении X получим, по правилу произведения, a_ib_{n-i} способов совершить эти действия одновременно. Следовательно, количество c_n способов разбить линейно упорядоченное n-элементное множество на два непересекающихся подмножества, совершить действие 1 на первом из них и действие 2 на втором из них, рассчитывается по формуле (4), т.е. определяется как коэффициент при z^n в разложении обыкновенной производящей функции $h(z)$, являющейся произведением пары функций $f(z)$ и $g(z)$, в формальный степенной ряд $h(z)\in\mathbb{C}[[z]]$.

`Пример 6.` В осеннем семестре у преподавателя n рабочих дней, и он хочет поделить его на две части. Первую часть (первые i дней) он хочет посвятить теории, а вторую часть (последние

$n-i$ дней) — практике. В первой части преподаватель может выбрать один рабочий день для того, чтобы съездить в командировку. Во второй части он может взять два дня отгула. Сколькими способами преподаватель может спланировать свой осенний семестр?

`Решение.` Количество способов выбора одного элемента из n-элементного множества равно

$$a_n = \binom{n}{1} = n,$$

а количество способов выбора двух элементов равно

$$b_n = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Следовательно, при фиксированном i у преподавателя имеется

$$a_i b_{n-i} = i\,\frac{(n-i)(n-i-1)}{2}$$

способов выбрать один день на командировку в первой части семестра и два дня отгула во второй части семестра. Таким образом, всего преподаватель может

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = \sum_{i=0}^{n} i\,\frac{(n-i)(n-i-1)}{2}$$

способами организовать свою работу в осеннем семестре.

Для нахождения более компактной формы записи этого решения введем для числовых последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ обыкновенные производящие функции

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\,z^n \qquad \text{и} \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2}\,z^n.$$

Заметим, что

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\,z^n = z \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} n z^{n-1} = z\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right)' = z\left(\frac{1}{1-z}\right)' = z \cdot \frac{1}{(1-z)^2} = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

Далее,

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2}\,z^n = \frac{z^2}{2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) z^{n-2} = \frac{z^2}{2}\left(\frac{1}{1-z}\right)'' = \frac{z^2}{2} \cdot \frac{2}{(1-z)^3} = \frac{z^2}{(1-z)^3}.$$

Следовательно,

$$h(z) = f(z) \cdot g(z) = \frac{z^3}{(1-z)^5} = z^3 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+4}{4} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+4}{4} z^{n+3} = \sum_{k=3}^{+\infty} \binom{k+1}{4} z^k,$$

откуда следует, что

$$c_n = \binom{n+1}{4}, \qquad n = 3, 4, \ldots$$

`Упражнение 6.` Получить ответ без использования производящих функций, используя прямые комбинаторные рассуждения.

`Упражнение 7.` Решить задачу в случае, когда лекции и практики могут идти у преподавателя в произвольном порядке.

4. Заметим, что до этого момента стандартный способ решения комбинаторных задач состоял у нас в следующем: мы, используя базовые комбинаторные принципы (правило сложения, суммы, а также их обобщения) получали рекуррентные соотношения для искомых чисел, а затем, используя производящие функции как элементы формальных степенных рядов, эти соотношения решали. Теперь же мы, зная комбинаторный смысл основных операций над производящими функциями, можем сразу строить решение задачи в терминах производящих функций.

4.1. В качестве характерного примера вернемся к задачам, связанным с числами C_n Каталана. Пусть, как и прежде,

$$f(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \dots$$

есть обыкновенная производящая функция для последовательности $\{C_n\}$ чисел Каталана, описывающих решение этой задачи. В предыдущей главе было показано, что эта функция удовлетворяет следующему уравнению:

$$f(z) = 1 + z f^2(z). \tag{5}$$

Оказывается, это уравнение легко интерпретируется (а следовательно, и получается) с использованием комбинаторного смысла сложения и умножения обыкновенных производящих функций. Покажем, как это делается, на примере задачи о перечислении путей Дика на плоскости.

Рассмотрим для этого линейно упорядоченное множество $X = (0, 2, 4, \dots, 2n)$ точек с четными координатами на оси абсцисс. Разобъем множество всех путей Дика на два непересекающихся подмножества — подмножество, состоящее из тривиального пути Дика, а именно, единственной точки $x = 0$ на плоскости, и подмножество, содержащее все остальные, нетривиальные пути. Тогда первому слагаемому отвечает слагаемое, равное единице в правой части (5). Осталось объяснить второе слагаемое в правой части (5), а именно, произведение трех производящих функций $g(z) = z$, $f(z)$ и $f(z)$.

Для его комбинаторной интерпретации заметим, прежде всего, что для любого нетривиального пути Дика существует точка $x_* = 2i$ на оси абсцисс (одна из оставшихся n точек множества X с координатами $x > 0$), в которой этот путь *впервые* пересекает ось абсцисс. При этом, в силу линейной упорядоченности множества X, эта точка определяется *однозначно*. Комбинаторному действию, состоящему в однозначном выборе этой единственной точки x_* из n-элементного линейно упорядоченного множества $X \setminus \{0\}$, на языке производящих функций отвечает функция $g(z)$ вида

$$g(z) = 0 + 1 \cdot z + 0 \cdot z^2 + \dots$$

Оставшееся множество точек с положительными координатами на оси абсцисс разбивается выбором точки x_* на два *упорядоченных* блока. Левому блоку отвечает участок пути Дика, нигде не пересекающий ось абсцисс. Такому участку однозначно отвечает *произвольный* путь Дика, построенный на линейно упорядоченном множестве Y, состоящем из $(i-1)$-й точки с координатами $(1,1), (3,1), \dots, (i-1,1)$. Число таких путей описывается функцией $f(z)$. Аналогично, правому блоку отвечает участок пути Дика, построенный на множестве точек $(2i, 0), \dots, (2n, 0)$. И опять, этот участок можно интерпретировать как произвольный путь Дика, построенный на некотором подмножестве $\{0, 2, \ldots, 2(n-i)\}$ линейно упорядоченного множества X. Количество способов построить такие пути также описывается функцией $f(z)$.

Подводя итоги, равенство (5) можно комбинаторно интерпретировать следующим образом: произвольный путь Дика (левая часть равенства) представляет собой либо тривиальный путь Дика (единица в правой части (5)), либо нетривиальный путь Дика. В последнем случае комбинаторное действие, описываемое слагаемым $zf^2(z)$, задает алгоритм построения такого пути. Именно, необходимо выбрать на оси абсцисс точку, в которой путь Дика впервые пересечет ось абсцисс, а затем построить слева от этой точки путь Дика, нигде не касающийся оси абсцисс, а справа от этой точки построить произвольный путь Дика.

4.2. `Упражнение 8.` Записать аналогичное (5) равенство для производящей функции, описывающей количество путей Моцкина и дать его комбинаторную интерпретацию с использованием комбинаторного смысла сложения и умножения обыкновенных производящих функций.

`Решение.` Уравнение

$$f(z) = 1 + z(f(z) + zf^2(z)) \tag{6}$$

можно интерпретировать следующим образом. Любой путь Моцкина представляет собой либо пустой путь Моцкина (единица в правой части (6)), либо нетривиальный путь Моцкина. В последнем случае множитель z означает однозначный выбор точки с абсциссой, равной единице. Если этой точке отвечает ордината, равная нулю (т.е. кусок пути Моцкина, состоящий из отрезка $(1,0)$), то правее этой точки можно построить произвольный путь Моцкина, начинающийся в точке с координатами $(1,0)$ и заканчивающийся в точке с координатами $(n,0)$. Количество таких путей описывается функцией $f(z)$. Если же этой точке отвечает ордината, равная единице (т.е. кусок пути Моцкина, состоящий из отрезка $(1,1)$), то правее этой точки можно однозначно выбрать точку, в которой путь Моцкина впервые пересекает ось абсцисс. Дальнейшие рассуждения повторяют интерпретацию правой части уравнения (5), описывающего числа Каталана.

2 Две задачи о наклейке марок на бандероль. Понятие композиции обыкновенных производящих функций

1. До этого момента мы рассматривали только две основные операции над производящими функциями — сложение и умножение таких функций. Наряду с этими операциями на практике не менее часто используется и еще одна важная и чрезвычайно полезная операция над производящими функциями, а именно, композиция производящих функций. Определение композиции обыкновенных производящих функций в общем случае дать достаточно сложно. Мы этим займемся только в пятой главе. Композиция экспоненциальных производящих функций — вещь более простая, и определение этой операции мы дадим уже в этой главе. Однако начнем мы, тем не менее, с одного частного случая композиции именно обыкновенных производящих функций. Это определение будет достаточно простым, с его помощью мы легко объясним основные принципы этой операции. Наконец, мы свяжем эту операцию с довольно интересным классом задач о раскладке предметов по ящикам в случае, когда количество k ящиков заранее не фиксировано.

1.1. `Пример 1.` За пересылку бандероли нужно уплатить 18 рублей, наклеивая на нее марки. На почте есть марки достоинством в 4, 6 и 10 рублей в неограниченном количестве. Сколькими способами можно оплатить пересылку бандероли, если два способа, отличающиеся количеством или порядком наклейки марок, считаются различимыми?

Прежде всего, давайте вручную переберем все возможные способы наклейки марок:

$6+6+6=18;$			
$10+4+4=18;$	$4+10+4=18;$	$4+4+10=18;$	
$6+4+4+4=18;$	$4+6+4+4=18;$	$4+4+6+4=18;$	$4+4+4+6=18.$

Итого имеем 8 различных способов. Наша задача — получить это число алгоритмически, т.е. без ручного перебора всех вариантов.

Попытаемся вначале составить для этой задачи рекуррентное соотношение. Пусть $h(n)$ есть количество способов, которыми можно наклеить марки достоинством в 4, 6 и 10 рублей с учетом порядка их наклейки так, чтобы их общая стоимость равнялась n. Для подсчета $h(n)$ вновь воспользуемся стандартным приемом — разобъем множество всех вариантов на блоки и подсчитаем количество элементов в каждом блоке.

Основное наблюдение здесь состоит в том, что в нашей задаче порядок наклейки марок важен. Поэтому мы можем разбить множество всех вариантов на три блока в зависимости от того, марка какого достоинства была наклеена на бандероль последней. При этом понятно, что количество способов наклеить марки так, чтобы последней шла марка достоинством в i рублей, равно $h(n-i)$. Следовательно, для нашей задачи справедливо рекуррентное соотношение вида

$$h(n) = h(n-4) + h(n-6) + h(n-10),$$

которое нужно дополнить начальными условиями $h(0)=1$, $h(n)=0$ при $n<0$.

Теперь решим это соотношение с помощью производящих функций. Введем для числовой последовательности $h(n) \equiv h_n$ обыкновенную производящую функцию

$$h(z) = h_0 + h_1 z + h_2 z^2 + \ldots$$

Перепишем наше рекуррентное соотношение для удобства в следующем виде:

$$h_{n+10} = h_{n+6} + h_{n+4} + h_n, \qquad n \geqslant 0,$$

$$h_0 = 1,\ h_1 = h_2 = h_3 = 0,\ h_0 = 1,\ h_5 = 1\ h_6 = h_7 = 0,\ h_8 = 1,\ h_9 = 0.$$

Домножая рекуррентное соотношение на x^{n+10} и суммируя по всем n, получаем равенство

$$\sum_{n=0}^{+\infty} h_{n+10} z^{n+10} = z^4 \sum_{n=0}^{+\infty} h_{n+6} z^{n+6} + z^6 \sum_{n=0}^{+\infty} h_{n+4} z^{n+4} + z^{10} \sum_{n=0}^{+\infty} h_n z^n \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\ h(z) - h_0 - \ldots - h_9 z^9 = z^4(f(z) - h_0 - \ldots - h_5 z^5) + z^6(f(z) - h_0 - \ldots - h_3 z^3) + z^{10} f(z)\ \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\ h(z) - 1 - z^4 - z^6 - z^8 = z^4(h(z) - 1 - z^4) + z^6(h(z) - 1) + z^{10} h(z)\ \Longleftrightarrow$$

$$h(z)[1 - z^4 - z^6 - z^{10}] = 1 + z^4 + z^6 + z^8 - z^4 - z^8 - z^6 = 1 \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad h(z) = \frac{1}{1 - (z^4 + z^6 + z^{10})} = 1 + (z^4 + z^6 + z^{10}) + (z^4 + z^6 + z^{10})^2 + \ldots$$

При этом ответ на поставленную задачу при фиксированной стоимости n бандероли равен коэффициенту при z^n в разложении этой функции $h(z)$ по степеням z:

$$h(z) = 1 + z^4(1 + z^2 + z^6) + z^8(1 + z^2 + z^6)^2 + z^{12}(1 + z^2 + z^6)^3 + z^{16}(1 + z^2 + z^6)^4 + \ldots =$$

$$= 1 + z^4 + z^6 + z^8 + 3z^{10} + 2z^{12} + 5z^{14} + 6z^{16} + 8z^{18} + 13z^{20} \dots$$

Отсюда, в частности, следует, что при $n = 18$ количество различных способов наклеить марки равно восьми.

1.2. Заметим теперь, что ответ на задачу, записанный в виде

$$h(z) = 1 + (z^4 + z^6 + z^{10}) + (z^4 + z^6 + z^{10})^2 + \dots + (z^4 + z^6 + z^{10})^k + \dots$$

имеет достаточно очевидную комбинаторную интерпретацию на языке обыкновенных производящих функций в духе рассуждений предыдущего параграфа.

Именно, введем производящую функцию

$$f(z) = 0 + 0 \cdot z + 0 \cdot z^2 + 0 \cdot z^3 + 1 \cdot z^4 + 0 \cdot z^5 + 1 \cdot z^6 + 0 \cdot z^7 + 0 \cdot z^8 + 0 \cdot z^9 + 1 \cdot z^{10} + 0 \cdot z^{11} + \dots$$

В терминах раскладки неразличимых предметов по ящикам коэффициенты этой функции означают, что в данный конкретный ящик мы можем положить одновременно только 4, 6 или 10 таких предметов.

Теперь переформулируем исходную задачу в терминах раскладки неразличимых предметов по ящикам. При такой интерпретации наклеить на m-е место марку достоинством в i рублей означает поместить в m-й ящик i неразличимых предметов (например, i рублевых монет). Тогда при фиксированном числе k наклеиваемых марок (или, что тоже самое, при фиксированном числе k ящиков) количество способов наклеить марки общей стоимостью в n рублей (или количество способов разложить n рублевых монет по k ящикам) равно коэффициенту при z^n у производящей функции вида

$$h_k(z) = (z^4 + z^6 + z^{10})^k = [f(z)]^k.$$

Однако в рассматриваемой задаче число k может быть любым. На языке производящих функций это означает, что для подсчета общего количества способов мы должны просуммировать все такие функции $h_k(z)$ по всем возможным k:

$$h(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} h_k(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} [f(z)]^k = \frac{1}{1 - f(z)} = \frac{1}{1 - (z^4 + z^6 + z^{10})}.$$

1.3. Приведенные выше рассуждения легко обобщаются на случай задачи о наклейке s различных марок достоинством в $i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_s$ рублей каждая. Количество $h(n)$ различных вариантов наклейки таких марок с учетом их порядка на бандероль, стоимость отправки которой равна n, есть коэффициент при z^n в разложении производящей функции

$$h(z) = \frac{1}{1 - (z^{i_1} + z^{i_2} + \dots + z^{i_s})} = \frac{1}{1 - f(z)}, \qquad f(z) = z^{i_1} + z^{i_2} + \dots + z^{i_s},$$

по степеням z.

В частности, в случае наличия на почте марок любого достоинства (т.е. марок стоимостью в один рубль, в два рубля и так далее) в неограниченном же количестве производящая функция $f(z) = z + z^2 + z^3 + \dots = z/(1 - z)$, а решение задачи описывается функцией

$$h(z) = \frac{1}{1 - f(z)} = \frac{1}{1 - \dfrac{z}{1 - z}} = \frac{1 - z}{1 - 2z} = 1 + \frac{z}{1 - 2z} = 1 + z + 2z^2 + 4z^3 + \dots + 2^{n-1} z^n + \dots$$

Следовательно, в этом случае количество $h(n)$ различных способов наклейки марок на бандероль, стоимость отправки которой равна n, есть 2^{n-1} при $n > 0$ и 1 при $n = 0$.

2. Заметим, что с формальной точки зрения сформулированная в п.1.3 задача эквивалентна задаче о поиске всех решений в *положительных* целых числах уравнения

$$i_1 + i_2 + \ldots + i_s = n \tag{7}$$

при условии, что порядок слагаемых в левой части этого равенства важен, а количество k этих слагаемых заранее не фиксировано. Возникает вопрос, а возможно ли получить решение такой задачи в *неотрицательных* целых числах?

2.1. Попробуем действовать по аналогии. В случае неотрицательных целых чисел производящая функция $f(z)$ имеет вид

$$f(z) = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots = \frac{1}{1-z}.$$

Формальное применение описанного в п.1 алгоритма приводит нас в этом случае к функции

$$h(z) = \frac{1}{1 - f(z)} = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{1-z}} = \frac{-1+z}{z},$$

которая не имеет смысла с точки зрения описанной в главе 2 теории формальных степенных рядов — стоящая в знаменателе функция $g(z) = z$ не имеет обратного элемента по умножению в кольце $C[[z]]$.

2.2. В чем же причина нашей неудачи? Дело в том, что уравнение (7) имеет в *неотрицательных* целых числах бесконечное число решений. Действительно, мы можем бесконечным числом способов добавлять в левую часть этого уравнения бесконечное же число нулей. И результат сложения в правой части уравнения от этого, естественно, не изменится. Таким образом, комбинаторная задача в такой постановке смысла не имеет.

2.3. Осталось понять, как этот факт отражается на попытке решения задачи с использованием производящих функций. Рассмотрим для этого обыкновенную производящую функцию

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

По определению, положим

$$h(z) = \frac{1}{1 - f(z)} := 1 + f(z) + [f(z)]^2 + \ldots + [f(z)]^k + \ldots \tag{8}$$

и попробуем понять, когда это определение имеет смысл с точки зрения теории формальных степенных рядов.

Предположим вначале, что $a_0 = 0$. В таком случае в правой части (8) всегда будет стоять конечное число слагаемых при степенях z^n, $n > 0$. Действительно,

$$[f(z)]^k = (a_1 z + a_2 z^2 + \ldots)^k = z^k (a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \ldots)^k.$$

Поэтому при всех значениях $k > n$ любая производящая функция вида $[f(z)]^k$ будет содержать только степени z, большие n. Как следствие, для того, чтобы сосчитать коэффициент при z^n у функции $h(z)$, достаточно ограничиться конечной суммой

$$1 + f(z) + [f(z)]^2 + \ldots + [f(z)]^n.$$

Пусть теперь $a_0 \neq 0$. В этом случае *любая* степень $[f(z)]^k$ будет содержать слагаемые с z^n. Иными словами, таких слагаемых теперь будет бесконечно много, и подсчет коэффициентов при z^n становится невозможен. Таким образом, при $a_0 \neq 0$ операция (8) с точки зрения теории формальных степенных рядов смысла не имеет.

2.4. Итак, мы подошли к следующему определению. Пусть

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

есть обыкновенная производящая функция, коэффициент a_0 которой равен нулю. Тогда корректно определена обыкновенная производящая функция

$$h(z) = h_0 + h_1 z + h_2 z^2 + \ldots := \frac{1}{1 - f(z)} = 1 + f(z) + [f(z)]^2 + \ldots + [f(z)]^k + \ldots,$$

представляющая собой композицию $g(f(z))$ пары обыкновенных производящих функций $f(z)$ и $g(z) = 1/(1-z)$.

Комбинаторный смысл этой операции состоит в следующем. Пусть имеется n неразличимых предметов и пусть существует a_n способов совершить над ними какое-то комбинаторное действие. Предположим также, что $a_0 = 0$, то есть любые комбинаторные действия в случае $n = 0$ отсутствуют. Тогда h_n есть количество способов распределить эти n элементов по какому-то (заранее не фиксированному) числу k линейно упорядоченных непустых блоков, а затем совершить в любом из таких блоков размером i_m комбинаторное действие a_{i_m} способами.

Список литературы

[1] D.Knut. *Искусство программирования.* Мир, 2000.