Ускорение алгоритмов разбиения

Иван Михайлин

Санкт-Петербургский Академический университет

5 июня 2014

План доклада

1. Раскраска графа

План доклада

План доклада

1. Раскраска графа
2. Задачи разбиения
3. Обзор результатов
   - Алгоритмы на общих графах
   - Алгоритмы на графах ограниченной максимальной степени
   - Алгоритмы на графах ограниченной средней степени.
   - Результаты

План доклада

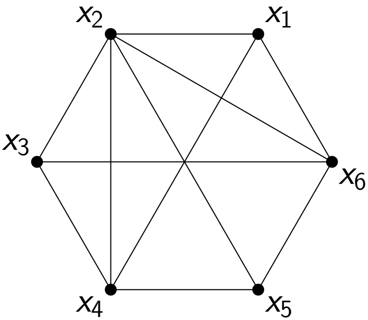
1. Раскраска графа
2. Задачи разбиения
3. Обзор результатов
   - Алгоритмы на общих графах
   - Алгоритмы на графах ограниченной максимальной степени
   - Алгоритмы на графах ограниченной средней степени.
   - Результаты
4. Откуда берется ускорение?

Раскраска

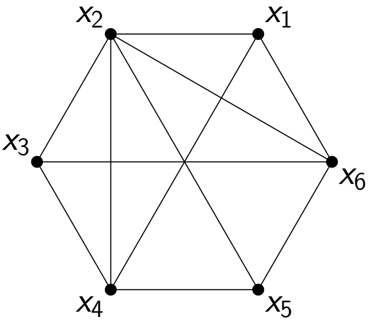
Задача k-раскраски граф:

Можно ли покрасить граф в k-цветов, так что каждое ребро имело разноцветные концы?

Раскраска

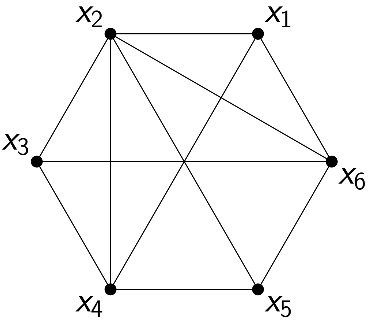


Раскраска



Независимые множества:

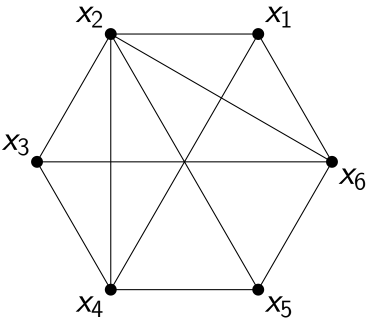
Раскраска



Независимые множества:

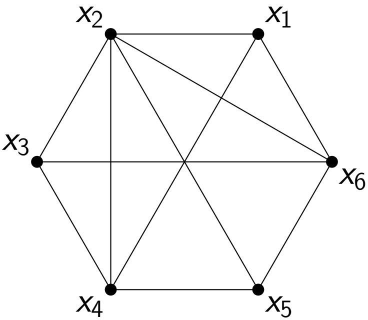
$\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_5\}, \{x_6\}$

Раскраска



Независимые множества:
$\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_5\}, \{x_6\}, \{x_1, x_3\}$

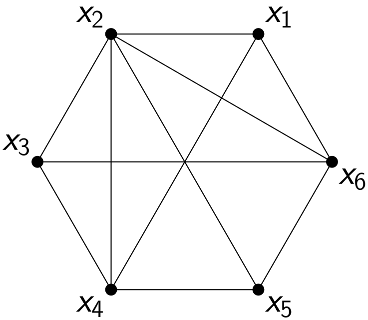
Раскраска



Независимые множества:

$\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_5\}, \{x_6\}, \{x_1, x_3\}, \{x_1, x_5\}$

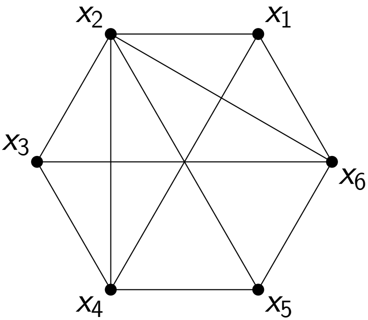
Раскраска



Независимые множества:

$\{x_1\},\{x_2\},\{x_3\},\{x_4\},\{x_5\},\{x_6\},\{x_1,x_3\},\{x_1,x_5\},\{x_3,x_5\}$

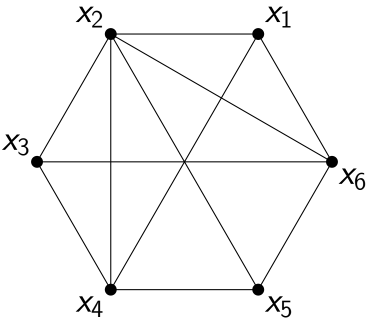
Раскраска



Независимые множества:

$\{x_1\},\{x_2\},\{x_3\},\{x_4\},\{x_5\},\{x_6\},\{x_1,x_3\},\{x_1,x_5\},\{x_3,x_5\},\{x_4,x_6\}$

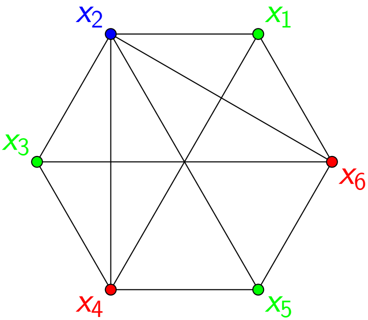
Раскраска



Независимые множества:

$\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_5\}, \{x_6\}, \{x_1, x_3\}, \{x_1, x_5\}, \{x_3, x_5\}, \{x_4, x_6\}, \{x_1, x_3, x_5\}$

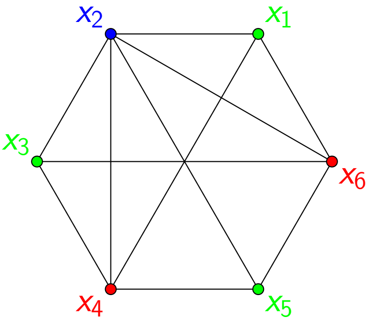
Раскраска



Независимые множества:

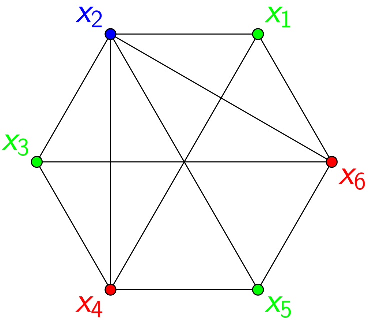
$\{x_1\},\{x_2\},\{x_3\}\ \{x_4\},\{x_5\},\{x_6\},\{x_1,x_3\},\{x_1,x_5\},\{x_3,x_5\},\{x_4,x_6\},\{x_1,x_3,x_5\}$

Раскраска



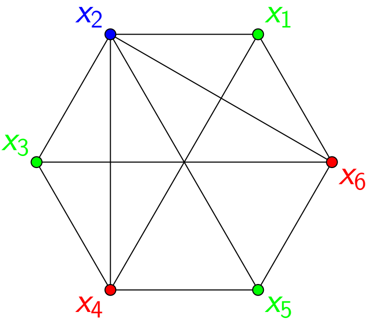
$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_1x_3 + x_1x_5 + x_3x_5 + x_4x_6 + x_1x_3x_5)$$

Раскраска



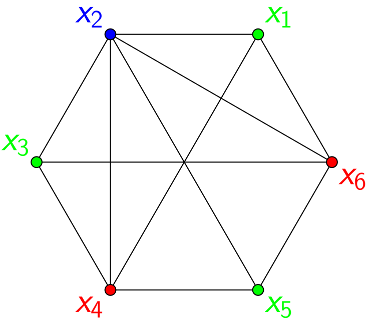
$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_1x_3 + x_1x_5 + x_3x_5 + x_4x_6 + x_1x_3x_5)^3$$

Раскраска



$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_1x_3 + x_1x_5 + x_3x_5 + x_4x_6 + x_1x_3x_5)^3$$
$$= x_2x_4x_6x_1x_3x_5 + \ldots$$

Раскраска



$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_1x_3 + x_1x_5 + x_3x_5 + x_4x_6 + x_1x_3x_5)^3$$
$$= x_2x_4x_6x_1x_3x_5 + \ldots$$

Умножения полиномов от n переменных — за $O^*(2^n)$.

Задачи разбиения

Задача разбиения множества: существует ли разбиение множества на непересекающиеся подмножества, обладающие заданным свойством.

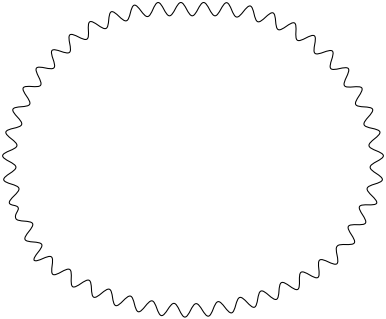
Задачи разбиения

Задача разбиения множества: существует ли разбиение множества на непересекающиеся подмножества, обладающие заданным свойством.
Пример: Задача k-раскраски граф.
Можно ли покрасить граф в k-цветов, так что каждое ребро имело разноцветные концы?
Эквивалентное определение: существует ли разбиение графа на k пустых подграфов?

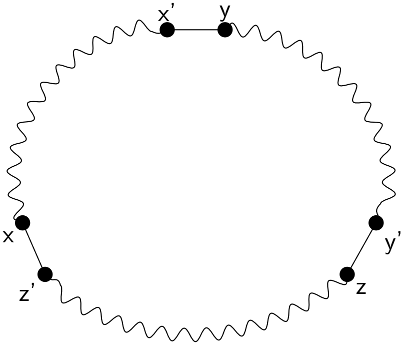
Гамильтонов цикл

Гамильтонов цикл — цикл проходящий по всем вершинам графа ровно по одному разу.

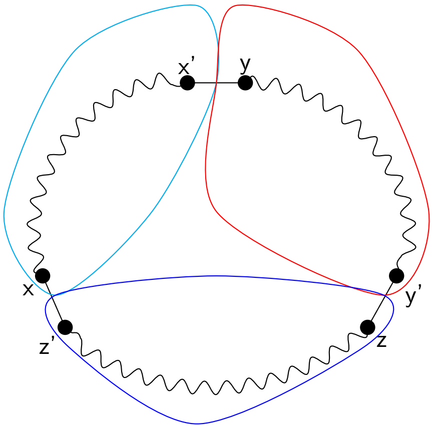
Гамильтонов цикл



Гамильтонов цикл



Гамильтонов цикл



Гамильтонов цикл

- Гамильтонов цикл — цикл проходящий по всем вершинам одного графа.

Гамильтонов цикл

- Гамильтонов цикл — цикл проходящий по всем вершинам одного графа.
- Гамильтонов цикл — существует тогда и только тогда, когда есть разбиение на подграфы с гамильтоновым путем (с фиксированными началами и концами).

Подсчет числа паросочетаний

- Совершенное паросочетания - это разбиение на пары вершин соединенных ребром.

Подсчет числа паросочетаний

- Совершенное паросочетания - это разбиение на пары вершин соединенных ребром.
- Поиск совершенного паросочетания в графе - задача из P.

Подсчет числа паросочетаний

- Совершенное паросочетания - это разбиение на пары вершин соединенных ребром.
- Поиск совершенного паросочетания в графе - задача из P.
- Подсчет числа паросочетаний - полная в классе $\#P$.

Алгоритмы на общих графах

Алгоритмы на общих графах.

задача	алгоритм 2^n	полином. память
Раскраска	Бьёркланд и др. 2006	Открытая задача
Гамильтоновость	Хельд, Карп 1962	Кон и др. 1977
Подсчет СП	Бьёркланд 2011	

Известные результаты

Алгоритмы на графах ограниченной максимальной степени.

задача	алгоритм $2^{(1-\epsilon_d)n}$	полином. память
Раскраска	Бьёркланд и др. 2010	
Гамильтоновость	Бьёркланд и др. 2008	
Подсчет СП	Цыган, Пилипчук 2013	Открытая проблема

Известные результаты

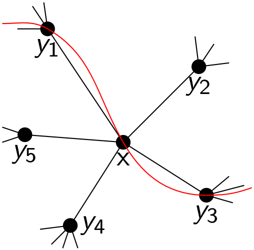
Алгоритмы а графах ограниченной средней степени.		
задача	алгоритм $2^{(1-\epsilon_d)n}$	полином. память
Раскраска	Открытая проблема	
Гамильтоновость	Цыган, Пилипчук 2013	Открытая проблема
Подсчет СП	Цыган, Пилипчук 2013	Открытая проблема

Полученные результаты

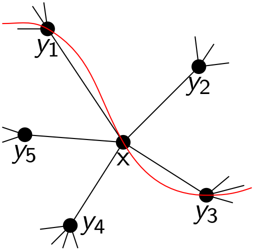
Алгоритмы на графах ограниченной средней степени.

задача	алгоритм $2^{(1-\epsilon_d)n}$	полином. память
Раскраска	✓	
Гамильтоновость	Цыган, Пилипчук 2013	✓
Подсчет СП	Цыган, Пилипчук 2013	✓

Откуда берется ускорение?

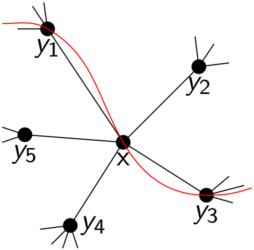


Откуда берется ускорение?



$S \subset V$, S — содержит гамильтонов путь.

Откуда берется ускорение?



$S \subset V$, S — содержит гамильтонов путь.

$$x \in S \Rightarrow \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\} \cap S \neq \varnothing$$

Семьи с младенцами

Дано: множество $U : |U| = n$, коллекция $\mathcal{S}$, набор из $p = \alpha n$ пар $(c_k, R_k), c_k \in U, R_k \subset U, \forall k : |R_k| \leq q$.

Семьи с младенцами

Дано: множество $U : |U| = n$, коллекция $\mathcal{S}$, набор из $p = \alpha n$ пар $(c_k, R_k), c_k \in U, R_k \subset U$, $\forall k : |R_k| \leq q$.

$$\forall A \in \mathcal{S}, k : c_k \in U \Rightarrow R_k \cap A \neq \varnothing$$

Семьи с младенцами

Дано: множество $U : |U| = n$, коллекция $\mathcal{S}$, набор из $p = \alpha n$ пар $(c_k, R_k), c_k \in U, R_k \subset U, \forall k : |R_k| \leq q$.

$$\forall A \in \mathcal{S}, k : c_k \in U \Rightarrow R_k \cap A \neq \varnothing$$

Тредуется найти минимальное m, что:

$$\prod_{i \in U} x_i \in (\sum_{A \in \mathcal{S}} \prod_{i \in A} x_i)^m$$

Семьи с младенцами

Дано: множество $U : |U| = n$, коллекция $\mathcal{S}$, набор из $p = \alpha n$ пар $(c_k, R_k), c_k \in U, R_k \subset U, \forall k : |R_k| \leq q$.

$$\forall A \in \mathcal{S}, k : c_k \in U \Rightarrow R_k \cap A \neq \varnothing$$

Тредуется найти минимальное m, что:

$$\prod_{i \in U} x_i \in (\sum_{A \in \mathcal{S}} \prod_{i \in A} x_i)^m$$

Основной результат работы: алгоритм со временем работы

$$O^*((1 - 2^{-q})^p \ \ 2^n) = O^*(2^{(1-\epsilon_{\alpha,q})n})$$

Спасибо за внимание!