k-перестановки из n элементов. Урновые схемы и схемы раскладки предметов по ящикам. Подсчет количества отображений конечных множеств. Числа Стирлинга второго рода (ДЗ).

1. Обозначим через $F(n)$ количество разбиений n-множества без блоков единичной длины. Доказать, что
$$B(n) = F(n) + F(n+1).$$

2. Найти рекуррентную формулу для вычисления чисел $F(n)$, введенных в предыдущем упражнении.

3. Доказать, что количество разбиений n-элементного множества, при котором ни в одном блоке не содержится пара последовательно идущих чисел, описывается числом Белла $B(n-1)$.

4. Из группы, состоящей из 7 мужчин и 4 женщин, нужно выбрать 6 человек так, чтобы среди них было не менее двух женщин. Сколькими способами это может быть сделано?

5. Предположим, что нам нужно разместить r натуральных чисел $1, 2, \ldots, r$ и $n-r$ нулей, $r < n$, в циклическом порядке так, чтобы при движении по часовой стрелке последовательность натуральных чисел всегда была бы возрастающей, и так, чтобы никакие два последовательно идущих натуральных числа i, $i+1$, не шли бы друг за другом (включая пару $(r, 1)$). Например, при $n \geq 2$ и $r = 1$ мы можем на любую из n позиций поставить единицу, а оставшиеся позиции заполнить нулями. Так как все такие размещения переходят в себя при вращениях по часовой стрелке, то всего имеется ровно одно подобное размещение при любом $n \geq 2$. В случае $r = 2$, $n = 4$ у нас имеется единственное с точностью до циклического сдвига устраивающее нас размещение $(1, 0, 2, 0)$, а в случае $r = 2$ и $n = 5$ таких размещений в точности два — $(1, 0, 2, 0, 0)$ и $(1, 0, 0, 2, 0)$. Подсчитать количество описанных размещений при произвольных значениях параметров n и r.

6. Говорят, что булева функция $f(x_1, ..., x_n)$ зависит от своего аргумента x_i, если можно подобрать такие значения $\{b_j\}$ для других

аргументов, что

$$f(b_1, ..., b_{i-1}, 0, b_{i+1}, ..., b_n) \neq f(b_1, ..., b_{i-1}, 1, b_{i+1}, ..., b_n).$$

Сколько булевых функций зависят от всех своих n аргументов?

7. Доказать формулы обращения :

$$f_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} g_i \qquad \Longleftrightarrow \qquad g_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f_i, \qquad k \geq 0.$$

8. Пусть $B_k(n)$ есть количество разбиений, таких, что если числа i и j входят в один и тот же блок, то $|i - j| > k$. Доказать, что $B_k(n) = B(n - k)$ для всех $n \geq k$.