

Курс: Математическая логика и теория вычислимости  
Практика 3,4. Исчисление высказываний

Исчисление высказываний гильбертовского типа

Напомним правила естественного вывода:

*правило введения импликации:*

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \quad (\rightarrow \text{intro})$$

*правило удаления импликации (MP):*

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash A \rightarrow B}{\Gamma \vdash B} \quad (\rightarrow \text{elim})$$

*правило введения конъюнкции*

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \quad (\wedge \text{intro})$$

*правила удаления конъюнкции*

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \quad (\wedge \text{elimI}) \quad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} \quad (\wedge \text{elimII})$$

*правила введения дизъюнкции*

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \quad (\vee \text{introI}) \quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \quad (\vee \text{introII})$$

*правило разбора случаев*

$$\frac{\Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C} \quad (\text{case analysis})$$

*правило удаления дизъюнкции*

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C} \quad (\vee \text{elim})$$

вывод чего угодно из противоречивых посылок

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash B} \quad (\neg\text{elim})$$

правила введения отрицания

$$\frac{\Gamma, A \vdash B \quad \Gamma, A \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A} \quad (\neg\text{intro})$$

закон снятия двойного отрицания

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A} \quad (\neg\text{elimII})$$

► Докажите, что следующие правила являются допустимыми:  
правило объединения посылок

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}$$

Совет: воспользуйтесь доказанной на лекции тавтологией  $\vdash (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow A \wedge B \rightarrow C$ .

правило расщепления посылок

$$\frac{\Gamma, A \wedge B \vdash C}{\Gamma, A, B \vdash C}$$

правило

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma, A \vee C \vdash B \vee C}$$

правило

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma, A \wedge C \vdash B \wedge C}$$

доказательство от противного

$$\frac{\Gamma, \neg B \vdash \neg A}{\Gamma, A \vdash B}$$

► Докажите, что следующие формулы являются теоремами исчисления высказываний

$$\vdash (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow A \vee B \rightarrow C$$

$$\vdash (A \vee B) \wedge C \rightarrow A \wedge C \vee B \wedge C$$

► (ДЗ) Докажите, что следующие формулы являются теоремами исчисления высказываний

$$\vdash A \rightarrow \neg\neg A$$

$$\vdash A \wedge B \vee C \rightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

$$\vdash A \wedge C \vee B \wedge C \rightarrow (A \vee B) \wedge C$$

$$\vdash (A \vee C) \wedge (B \vee C) \rightarrow A \wedge B \vee C$$

► (ДЗ) Докажите, что закон Де Моргана являются теоремой исчисления высказываний

$$\vdash \neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

► (ДЗ) Уметь доказывать все утверждения Леммы 1 из Лекции 3 (мне присылать не надо!).

## Исчисление секвенций

Схема аксиом:

$$A, \Gamma \vdash A, \Delta$$

Правила введения конъюнкции в антецедент и сукцедент:

$$\frac{A, B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta} (\wedge \vdash) \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta} (\vdash \wedge)$$

Правило введения дизъюнкции в антецедент и сукцедент:

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta} (\vee \vdash) \quad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} (\vdash \vee)$$

Правило введения импликации в антецедент и сукцедент:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \vdash \Delta} (\rightarrow \vdash) \quad \frac{A, \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta} (\vdash \rightarrow)$$

Правило введения отрицания в антецедент и сукцедент:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta} (\neg \vdash) \quad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} (\vdash \neg)$$

► Приведите вывод формулы или постройте контрпример

$$((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow q$$

$$p \rightarrow q \vdash r \vee p \rightarrow r \vee q$$

(ДЗ)

$$\vdash (((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow p$$

$$p \rightarrow q \vdash (p \rightarrow r) \rightarrow q \rightarrow r$$

$$p \leftrightarrow q \vdash p \wedge r \leftrightarrow q \wedge r$$

► Выведите правила введения сложения по модулю 2 (XOR) в антецедент и сукцедент секвенции.

► (ДЗ) Выведите правила введения стрелки Пирса и штриха Шеффера в антецедент и сукцедент секвенции.