Лекция 2. Линейные модели.

5 марта 2013 г.

Простая линейная регрессия

Определение

$$y = b_0 + b_1 x_1 + \ldots + b_p x_p + \epsilon$$

Использование в R

```
> library(faraway)
> (lm1<-lm(Species~Area+Elevation+Nearest+Scruz+Adjacent,
data=gala))
Call:
lm(formula = Species ~ Area + Elevation + Nearest +
Scruz + Adjacent,data = gala)
Coefficients:
(Intercept)       Area  Elevation    Nearest       Scruz
   7.068221 -0.023938   0.319465  0.009144  -0.240524
   Adjacent
  -0.074805
```

Summary часть 1

Теорема

Если, $\epsilon \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2 I)$, $\hat{b}$ *- оценка, полученная методом наименьших квадратов, то*

1) $\hat{b} \sim \mathrm{N}(b, (X^T X)^{-1}\sigma^2)$

2) $\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\epsilon}^T \hat{\epsilon}}{n-p}$ *- несмещенная оценка* σ^2

Определение (Стандартная ошибка)

Стандартная ошибка статистики - стандартное отклонение ее распределения.

Для $\hat{b}_i$*:* $se(\hat{b}_{i-1}) = \sqrt{(X^T X)^{-1}_{ii}}\hat{\sigma}$

Определение (t-статистика для одного предиктора)

$$t_i = \frac{\hat{b}_i}{se(\hat{b}_i)} \sim t(n-p)$$

Гипотеза: равенсто 0 предиктора.

Summary часть 1

```
> summary(lm1)
Call:
lm(formula = Species ~ Area + Elevation + Nearest + Scruz +
    data = gala)
Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-111.679  -34.898   -7.862   33.460  182.584
Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  7.068221  19.154198   0.369 0.715351
Area        -0.023938   0.022422  -1.068 0.296318
Elevation    0.319465   0.053663   5.953 3.82e-06 ***
Nearest      0.009144   1.054136   0.009 0.993151
Scruz       -0.240524   0.215402  -1.117 0.275208
Adjacent    -0.074805   0.017700  -4.226 0.000297 ***
---
Signif.codes: 0‘***’0.001‘**’0.01‘*’0.05‘.’0.1‘ ’1
```

Summary часть 2

```
Residual standard error: 60.98 on 24 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.7658,Adjusted R-squared: 0.7171
F-statistic:  15.7 on 5 and 24 DF,  p-value: 6.838e-07
```

Определение

$$R^2 = 1 - \frac{\sum(\hat{y}_i - y_i)^2}{\sum(y_i - \overline{y})^2}, \qquad R^2_{adj} = 1 - (1 - R^2)\frac{n-1}{n-p}$$

$$F = \frac{(\sum(y_i - \overline{y})^2 - \hat{\epsilon}^T\hat{\epsilon})/(p-1)}{(\hat{\epsilon}^T\hat{\epsilon})/(n-p)} \sim F(p-1, n-p)$$

Гипотеза: равенсто 0 всех предикторов.

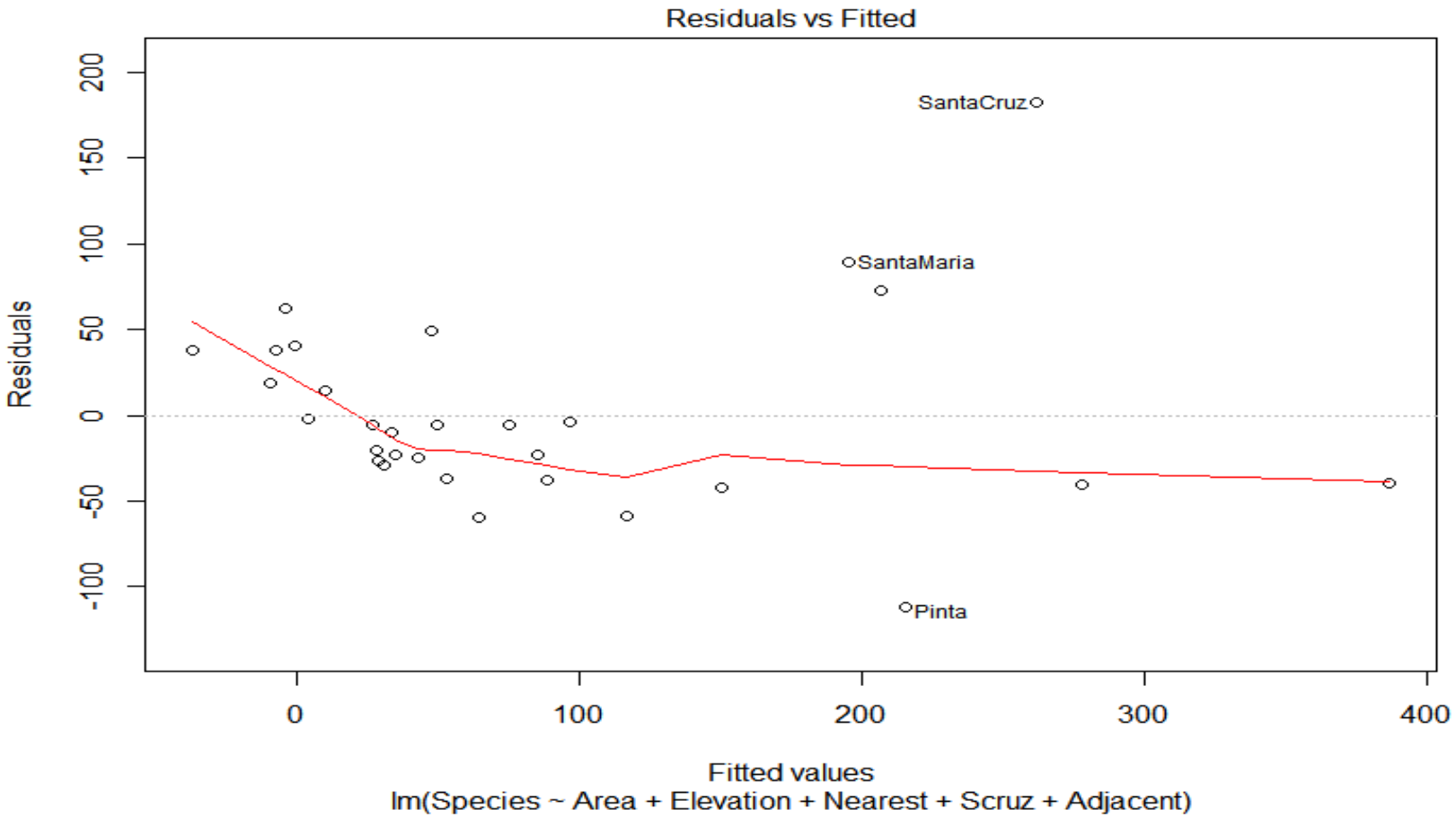
Доверительные интервалы для коэффициентов

Использование в R

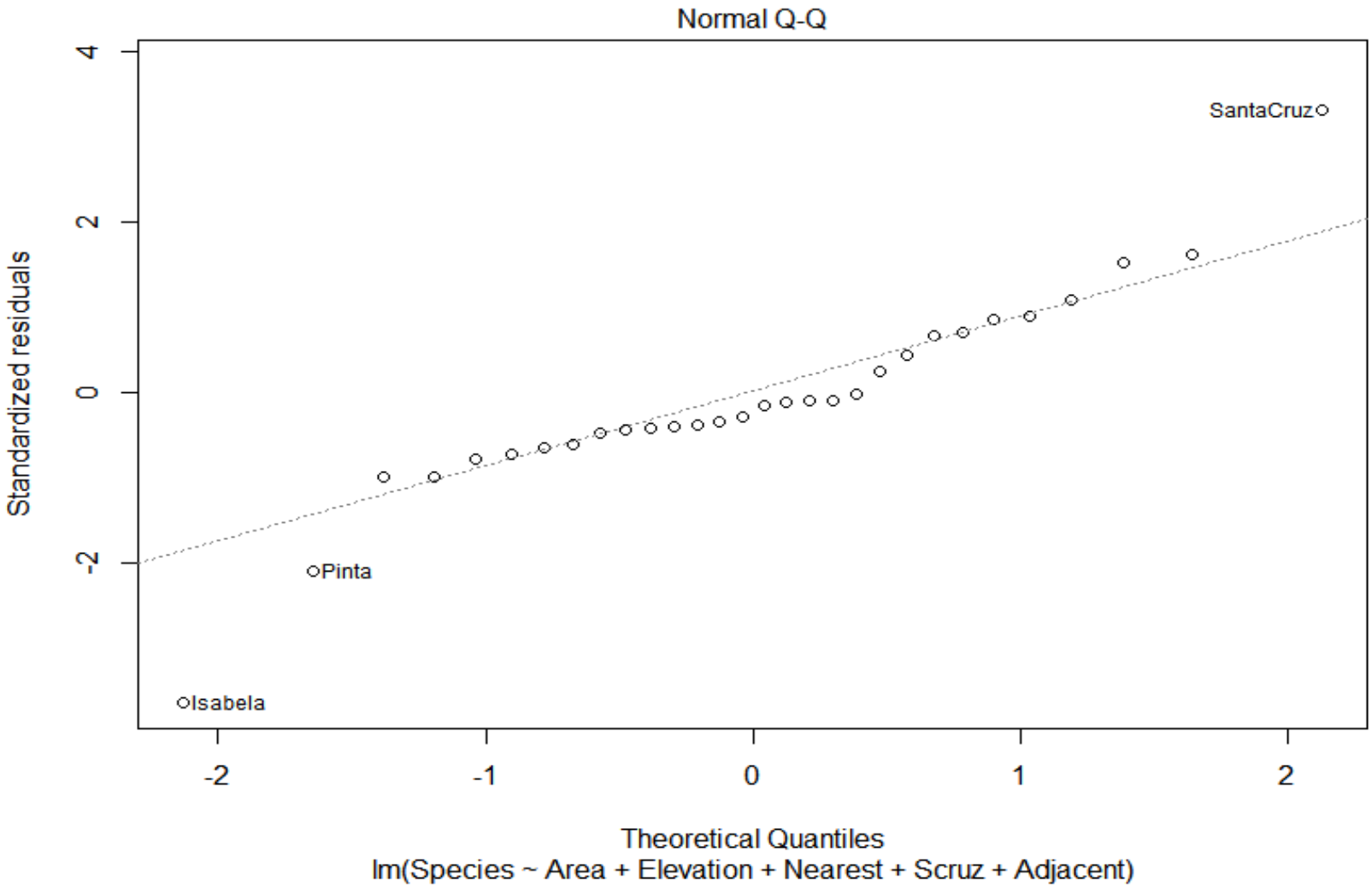
```
> confint(lm1)
                    2.5 %       97.5 %
(Intercept) -32.4641006 46.60054205
Area         -0.0702158  0.02233912
Elevation     0.2087102  0.43021935
Nearest      -2.1664857  2.18477363
Scruz        -0.6850926  0.20404416
Adjacent     -0.1113362 -0.03827344
```

Plot

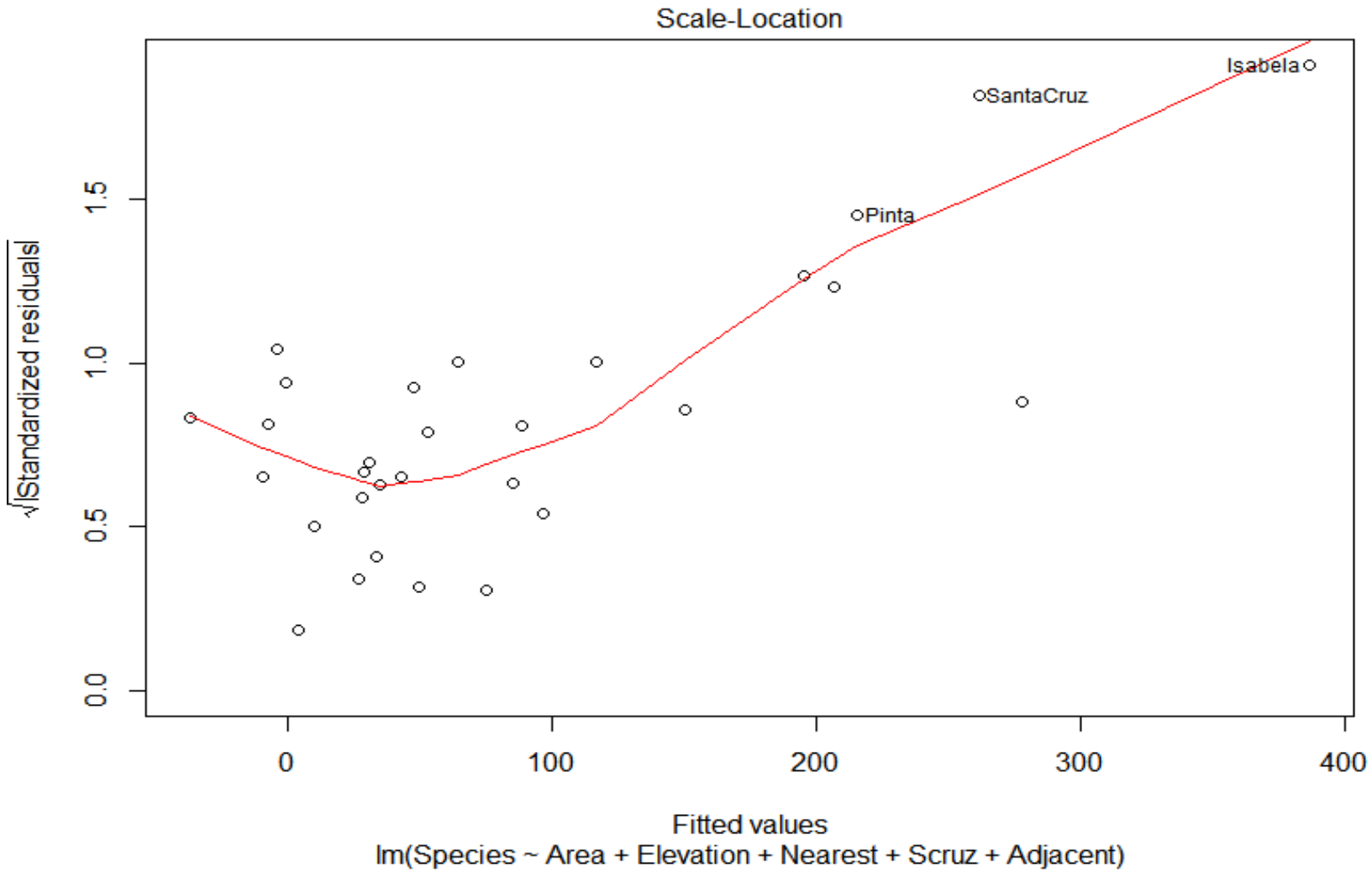
```
> plot(lm1)
```



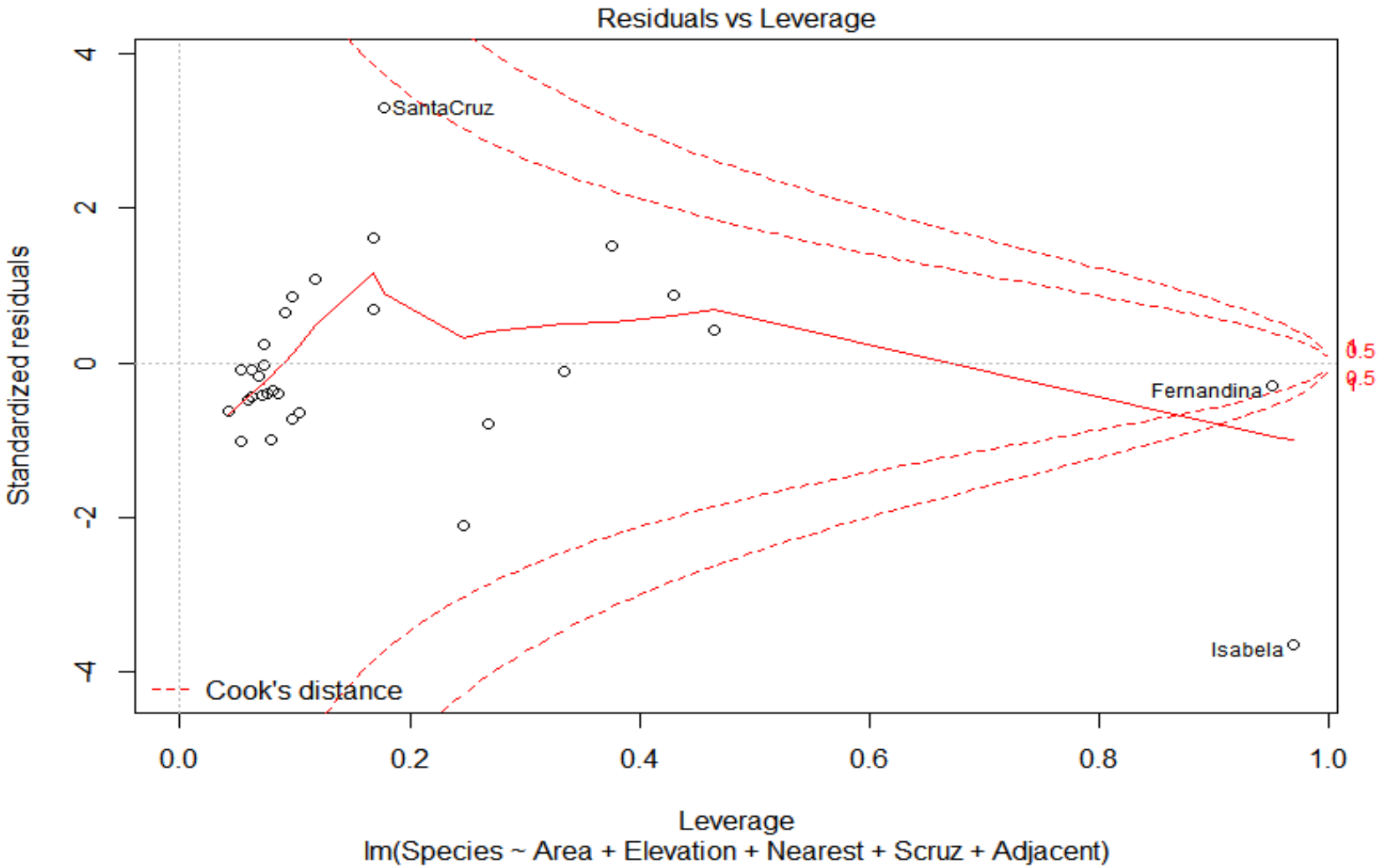
Plot


Normal Q-Q
Standardized residuals
4
2
0
-2
SantaCruz
Pinta
Isabela
-2
-1
0
1
2
Theoretical Quantiles
lm(Species ~ Area + Elevation + Nearest + Scruz + Adjacent)

Plot


Scale-Location
Isabela
SantaCruz
Pinta
√|Standardized residuals|
0.0
0.5
1.0
1.5
0
100
200
300
400
Fitted values
lm(Species ~ Area + Elevation + Nearest + Scruz + Adjacent)

Plot


Residuals vs Leverage
SantaCruz
Fernandina
Isabela
0.5
0.5
Cook's distance
Standardized residuals
4
2
0
-2
-4
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
Leverage
lm(Species ~ Area + Elevation + Nearest + Scruz + Adjacent)

Критерий Дарбина-Уотсона

Определение (Статистика Дарбина-Уотсона)

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{p} (\hat{\epsilon}_t - \hat{\epsilon}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{p} \hat{\epsilon}_t^2}$$

Используется для проверки автокорреляции остатков

Использование в R

```
> library(lmtest)
> dwtest(lm1)
Durbin-Watson test
data:  lm1
DW = 2.4759, p-value = 0.9017
alternative hypothesis: true autocorrelation
is greater than 0
```

Линейная регрессия без нулевого коэффициента

Определение

$$y = b_1 x_1 + \ldots + b_p x_p + \epsilon$$

Использование в R

```
> lm(Species~Area+Elevation+Nearest+Scruz+Adjacent+0,
data=gala)
Call:
lm(formula = Species ~ Area + Elevation + Nearest +
    Scruz + Adjacent + 0, data = gala)
Coefficients:
     Area  Elevation    Nearest      Scruz   Adjacent
 -0.02664    0.33065    0.02590   -0.21359   -0.07646
```

Линейная регрессия с пересечением

Определение

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_1 x_2 + \epsilon$$

Использование в R

```
> lm(Species~Elevation*Adjacent,
data=gala)
Call:
lm(formula = Species ~ Elevation * Adjacent, data = gala)
Coefficients:
       (Intercept)           Elevation            Adjacent
         -7.067e+00           2.908e-01          -5.780e-03
Elevation:Adjacent
         -4.633e-05
```

Линейная регрессия с пересечением

Определение

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_1 x_2 + \epsilon$$

Использование в R

```
> lm(Species~Elevation+Adjacent+Elevation:Adjacent,
data=gala)
Call:
lm(formula = Species ~ Elevation + Adjacent +
    Elevation:Adjacent, data = gala)
Coefficients:
       (Intercept)           Elevation            Adjacent
         -7.067e+00           2.908e-01          -5.780e-03
Elevation:Adjacent
         -4.633e-05
```

Преобразование данных. Метод Бокса-Кокса

Определение

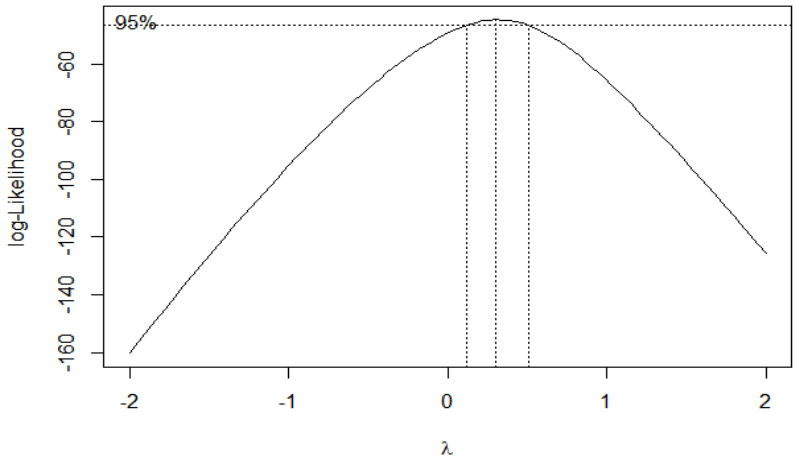
Хотим преобразовать вектор y в $g_\lambda(y)$,

$$g_\lambda(y) = \begin{cases} \frac{y^\lambda - 1}{\lambda} & \lambda \neq 0 \\ \ln(y) & \lambda = 0 \end{cases}$$

таким образом, чтобы максимизировать функцию правдоподобия.

Использование в R

```
> library(MASS)
> bc <- boxcox(lm1,plot=T)
> m <- which.max(bc$y)
> lambda <- bc$x[m]
```



Выбор параметров: функция step

Определение (AIC и BIC)

$$AIC = 2p - 2\ln(L), \qquad BIC = \ln(n) - 2\ln(L)$$

где L - значение функции правдоподобия.

Использование в R

```
Start:  AIC=251.93
Species ~ Area + Elevation + Nearest + Scruz + Adjacent
             Df Sum of Sq    RSS    AIC
- Nearest     1         0  89232 249.93
- Area        1      4238  93469 251.33
- Scruz       1      4636  93867 251.45
<none>                     89231 251.93
- Adjacent    1     66406 155638 266.62
- Elevation   1    131767 220998 277.14
```

Выбор параметров: функция step

Использование в R

```
Step:  AIC=249.93
Species ~ Area + Elevation + Scruz + Adjacent

             Df Sum of Sq    RSS    AIC
- Area        1      4436  93667 249.39
<none>                    89232 249.93
- Scruz       1      7544  96776 250.37
- Adjacent    1     72312 161544 265.74
- Elevation   1    139445 228677 276.17
Step:  AIC=249.39
Species ~ Elevation + Scruz + Adjacent
```

Выбор параметров: функция step

Использование в R

```
            Df Sum of Sq    RSS    AIC
- Scruz      1      6336 100003 249.35
<none>                   93667 249.39
- Adjacent   1     69860 163527 264.11
- Elevation  1    275784 369451 288.56
Step:  AIC=249.35
Species ~ Elevation + Adjacent
            Df Sum of Sq    RSS    AIC
<none>                   100003 249.35
- Adjacent   1     73251 173254 263.84
- Elevation  1    280817 380820 287.47
Call:
lm(formula = Species ~ Elevation + Adjacent, data = gala)
Coefficients:
(Intercept)    Elevation     Adjacent
    1.43287      0.27657     -0.06889
```

Предсказание новых значений

Использование в R

```
> lm3<-lm(Species~Elevation+Adjacent,data=gala)
> preds <- data.frame(Elevation=400, Adjacent=300)
> predict(lm3, newdata=preds)
       1
91.39454
> predict(lm3, newdata=preds, interval="confidence")
       fit       lwr     upr
1 91.39454 68.52808 114.261
```