Все задания

$\boxed{\text{FL 1}}$ Постройте DFA, который принимает только строчки над алфавитом $\{0, 1\}$, в которых не встречается подстрока 11.

$\boxed{\text{FL 2}}$ Докажите, что язык L распознаётся DFA если и только если $\overline{L}$ распознаётся DFA, где $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$.

$\boxed{\text{FL 3}}$ Докажите, что любой конечный язык распознаётся DFA.

$\boxed{\text{FL 4}}$ Докажите, что язык

a) $\{\, a^m b^n \mid m, n \geq 0, m \equiv n \pmod 3 \,\}$

b) $\{\, w \in \{0, 1\}^* \mid w$ делится на 5 как двоичное число $\}$

распознаётся DFA.

$\boxed{\text{FL 5}}$ a) Докажите утверждение: L, M распознаётся DFA $\implies$ $L \cap M$ распознаётся DFA.

b) Если для некоторых языков L, M их пересечение $L \cap M$ распознаётся некоторым DFA, обязательно ли L и M распознаются некоторыми DFA?

$\boxed{\text{FL 6}}$ Докажите, что для расширенной на строки функции перехода δ, произвольных строк x, y и произвольного состояния q верно $\delta(q, xy) = \delta(\delta(q, x), y)$

$\boxed{\text{FL 7}}$ Докажите, что язык

a) $\{\, a^n b^n \mid n \geq 0 \,\}$

b) $\{\, a^n b^m \mid n \neq m \,\}$

c) $\{\, a^n b^m \mid m, n \geq 0,\ \gcd(m, n) > 1 \,\}$

не распознаётся никаким DFA.

$\boxed{\text{FL 8}}$ Докажите, что класс распознаваемых DFA языков замкнут относительно операции

a) $\sqrt{L} = \{\, m \mid mm \in L \,\}$

b) $L^R = \{\, m^R \mid m \in L \,\}$, где $(a_1 a_2 \ldots a_n)^R = a_n a_{n-1} \ldots a_1$

Определение. *Будем говорить, что язык L отделяет слова x и y, если существует такое слово z, что ровно одно из слов xz, yz принадлежит L. Для неотделимых языком L слов x, y будем писать $x \equiv_L y$.*

Индексом L назовём супремум размеров множеств, в которых все строки попарно отделимы языком L.

$\boxed{\text{FL 9}}$ Докажите, что

a) язык L распознается некоторым DFA тогда и только тогда, когда индекс L конечен.

b) более того, индекс языка равен минимальному размеру распознающего L автомата.

$\boxed{\text{FL 10}}$ Пусть язык L распознаётся некоторым DFA. Всегда ли следующие языки распознаются DFA?

a) $L/L' = \{\, u \mid \exists v : uv \in L, v \in L' \,\}$, где $L' \subseteq \Sigma^*$ — произвольный язык.

b) $PERMUTE(L) = \{\, a_{k_1} \ldots a_{k_n} \mid n \geq 0, (k_1, \ldots, k_n)$ — некоторая перестановка, $a_i \in \Sigma, a_1 \ldots a_n \in L \,\}$

c) $SUBSEQ(L) = \{\, a_1 \ldots a_n \mid n \geq 0, a_i \in \Sigma, \exists u_0, \ldots, u_n \in \Sigma^* : u_0 a_1 u_1 a_2 \ldots a_n u_n \in L \,\}$

d) $\frac{1}{2}L = \{\, u \mid u \in \Sigma^*, \exists v \in \Sigma^* : |u| = |v|, uv \in L \,\}$

e) $SHIFT(L) = \bigcup\limits_{k \geq 0} \{\, a_{k+1} \ldots a_n a_1 \ldots a_k \mid a_1 \ldots a_n \in L \,\}$

f) $h(L) = \{\, h(x) \mid x \in L \,\}$, где $L \subseteq \Sigma^*$ и h — некоторый гомоморфизм на Σ^*.

g) $h^{-1}(L) = \{\, y \mid h(y) \in L \,\}$, где $L \subseteq \Sigma^*$ и h — некоторый гомоморфизм на Σ^*.

$\boxed{\text{FL 11}}$ Пусть $A \subseteq \mathbb{N}$. Введём обозначение:

$B_k(A) = \{\, w \mid w$ — представление некоторого числа из A в k-ичной системе счисления $\}$

Приведите пример множества A, для которого $B_2(A)$ распознаётся DFA, а $B_3(A)$ не распознаётся DFA.

Определение. *Будем говорить, что DFA синхронизируется строкой s, если $\forall q_1, q_2 \in Q$: $\delta(q_1, s) = \delta(q_2, s)$.*

$\boxed{\text{FL 12}}$ Докажите, что если детерминированный автомат A имеет k состояний и синхронизируется некоторой строкой, то он также синхронизируется и строкой длины не более k^3.

Определение. *Будем говорить, что co-NFA $A = (\Sigma, Q, q_0, \delta, F)$ принимает слово $x \in \Sigma^*$, если A заканчивает каждое вычисление на входе x в состоянии из F.*

$\boxed{\text{FL 13}}$ Докажите, что класс языков, распознающихся co-NFA, совпадает с классом языков, распознающихся NFA.

$\boxed{\text{FL 14}}$ Существует ли такое семейство языков $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, что E_n распознается NFA с n состояними, но требует DFA размера как минимум c^n для некоторого $c > 1$?

$\boxed{\text{FL 15}}$ Докажите нерегулярность следующих языков:

a) $\{\, 0^n \mid n$ — полный квадрат $\}$

b) $\{\, w \in \{0,1\}^* \mid w$ — двоичное представление простого числа $\}$

$\boxed{\text{FL 16}}$ Приведите алгоритм, который по данному DFA A вычисляет количество распознаваемых им слов длины n за время

a) $poly(|Q_A| \cdot n)$

b) $poly(|Q_A|) \cdot log(n)$

$\boxed{\text{FL 17}}$ Будем писать $L_1 \ll L_2$, если $L_1 \subset L_2$ и $|L_2 \setminus L_1| = \infty$. Докажите, что если L_1, L_2 — регулярные и $L_1 \ll L_2$, то существует такой регулярный язык L_3, что $L_1 \ll L_3 \ll L_2$.

$\boxed{\text{FL 18}}$ Пусть M_1 и M_2 — DFA, имеющие k_1 и k_2 состояний соответственно, и пусть $U = L(M_1) \cup L(M_2)$, где $L(A)$ — язык, который распознается автоматом A. Пусть $U \neq \varnothing$ и $U \neq \Sigma^*$. Докажите, что U содержит некоторую строку s_1 длины не более $\max(k_1, k_2)$ и что существует не принадлежащая U строка s_2 длины не более $k_1 k_2$.

$\boxed{\text{FL 19}}$ Приведите регулярные выражения для следующих языков:

— Множество слов из 0 и 1, в которых каждая пара смежных 0 находится перед парой смежных 1.

— Множество слов из 0 и 1, в которых число 0 делится на 3, а число 1 чётно.

Определение. *КС-грамматика (контекстно-свободная грамматика, context-free grammar, cf-grammar) G — это четвёрка (Σ, N, R, S) такая, что:*

- *Σ — конечный алфавит, его элементы мы назовем терминальными символами, или* терминалами.
- *N — некоторое конечное множество, причём $N \cap \Sigma = \emptyset$. Его элементы мы называем нетерминальными символами, или* нетерминалами.
- *$S \in N$ —* стартовый символ.

- *R — конечное множество правил вывода вида $A \to \alpha, A \in N, \alpha \in (N \cup \Sigma)^*$, R — конечное подмножество $2^{N \times (N \cup \Sigma)^*}$.*

Языком $L(G)$, распознаваемым (или генерируемым) грамматикой G, будем называть множество строк из Σ^*, которые можно вывести из S по правилам вывода из R.

Пример. *Язык Дика, или язык всех правильных скобочных последовательностей, распознаётся грамматикой $G = (\Sigma, N, R, S)$, где $\Sigma = \{a, b\}$, $N = \{S\}$, $R = \{S \to aSb,\ S \to SS,\ S \to \varepsilon\} = \{S \to aSb \,|\, SS \,|\, \varepsilon\}$ (почему это верно?)*

$\boxed{\text{FL 20}}$ Докажите, что следующие языки являются контекстно-свободными:

a) $\{\, a^n b^{n+m} a^m \mid n, m \geq 0 \,\}$

b) $\{\, w \mid w \in \{a, b\}^*, |w|_a = |w|_b \,\}$

c) $\overline{L}$, где $L = \{\, ww \mid w \in \{a, b\}^* \,\}$

d) $\{\, x\#y \mid x, y \in \{0, 1\}^*, x \neq y \,\}$

$\boxed{\text{FL 21}}$ Докажите, что класс контекстно-свободных языков замкнут относительно операций:

a) Объединения с контекстно-свободными и пересечения с регулярными языками.

b) $SUFFIX(L) = \{\, v \mid \exists u : uv \in L \,\}$.

c) $h(L)$, где $h : \Sigma^* \to \Gamma^*$ — произвольный гомоморфизм.

d) $SHIFT(L)$.

$\boxed{\text{FL 22}}$ Докажите, что если L_1 и L_2 — регулярные языки, то $L_3 = \{\, uv \mid u \in L_1,\ v \in L_2,\ |u| = |v| \,\}$ контекстно-свободный.

$\boxed{\text{FL 23}}$ Докажите, что замыкание Клини унарного языка (то есть языка над алфавитом из одного символа) является регулярным языком.

$\boxed{\text{FL 24}}$ Пусть $G = (\Sigma, N, R, S)$ — обыкновенная грамматика, в которой $|R| = p$ и длина правой части каждого правила не превосходит m. Пусть из $A \in N$ выводится пустая строка. Докажите, что тогда из A возможно вывести пустую строку за не более чем $\frac{m^p - 1}{m - 1}$ шагов.

Лемма. *(The pumping lemma for CF-grammars)*

Для каждого контекстно-свободного языка $L \subseteq \Sigma^*$ существует такая константа $p \geq 1$, что для любой строки $w \in L$, для которой $|w| \geq p$, существует разложение $w = xuyvz$, где $|uv| > 0$ и $|uyv| \leq p$, для которого $xu^i y v^i z \in L$ при всех $i \geq 0$.

Доказательство. Обсудим на занятии □

$\boxed{\text{FL 25}}$ Докажите усиление леммы о накачке, утверждающее существование подобного разбиения с $|u| > 0, |v| > 0$.

$\boxed{\text{FL 26}}$ Докажите следующую *Лемму Огдена*:

Лемма. *Для каждого контекстно-свободного языка $L \subseteq \Sigma^*$ существует такая константа $p \geq 1$, что для любой строки $w \in L$, для которой $|w| \geq p$, и для любого множества $P \subseteq \{1, \ldots, |w|\}, |P| \geq p$ выделенных позиций в w существует разложение $w = xuyvz$, для которого*

- *uv содержит хотя бы одну выделенную позицию,*

- *uyv содержит не более p выделенных позиций,*
- *$xu^iyv^iz \in L$ при всех $i \geq 0$.*

$\boxed{\text{FL 27}}$ Докажите, что следующие языки не являются контекстно-свободными:
a) $\{ a^m b^n c^n \mid m, n \geq 0, m \neq n \}$
b) $\{ w \mid w \in \{a, b, c\}^*, |w|_a = |w|_b = |w|_c \}$
c) $\{ w \mid w \in \{a, b, c\}^*,\ |w|_a \cdot |w|_b < |w|_c \}$
d) $\{ a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N},\ n \mid m \}$

$\boxed{\text{FL 28}}$ Докажите, что класс контекстно-свободных языков не замкнут относительно операции
a) пересечения
b) дополнения
c) $\frac{1}{2}L = \{ u \mid u \in \Sigma^*,\ \exists v \in \Sigma^* : |u| = |v|, uv \in L \}$
d) $SHUFFLE(L_1, L_2) = \{ a_1 b_1 \dots a_n b_n \mid a_i, b_j \in \Sigma,\ a_1 \dots a_n \in L_1,\ b_1 \dots b_n \in L_2 \}$

$\boxed{\text{FL 29}}$ Докажите, что каждая обыкновенная грамматика, генерирующая язык $L = \{ w_1 w_2 \mid w_1, w_2 \in \{a, b\}^*,\ w_1 = w_1^R,\ w_2 = w_2^R \}$, неоднозначна.

Определение. *Будем говорить, что язык L префиксно замкнут, если для каждого слова $w \in L$ все его префиксы лежат в L.*

$\boxed{\text{FL 30}}$ Докажите, что если контекстно-свободный язык бесконечен и префиксно замкнут, то он содержит некоторый бесконечный регулярный язык.

Определение. *Конъюнктивной грамматикой будем называть четвёрку $G = (\Sigma, N, R, S)$, где Σ — алфавит, N — множество нетерминальных символов, R — множество правил вывода, S — выделенный стартовый нетерминальный символ. Правила вывода могут иметь вид $A \to \alpha_1 \,\&\, \alpha_2 \,\&\, \dots \,\&\, \alpha_k$, где $A \in N$, $\alpha_i \in (\Sigma \cup N)^*$. Принадлежность строк $L(A)$ определим следующим образом: если для любого i выполнено $w \in L(\alpha_i)$, то $w \in L(A)$.*

$\boxed{\text{FL 31}}$ Докажите, что следующие языки генерируются конъюнктивными грамматиками:
a) $\{ a^n b^n c^n \mid n \geq 0 \}$
b) $\{ wcw \mid w \in \{a, b\}^* \}$
c) $\{ a^{4^n} \mid n \geq 0 \}$

$\boxed{\text{FL 32}}$ Докажите, что если $L \subseteq \{a, b\}^*$ — регулярный язык, то $PERMUTE(L)$ контекстно-свободный.

Определение. *Линейной грамматикой называется обыкновенная грамматика, у которой каждое правило вывода содержит не более одного нетерминального символа в правой части.*

$\boxed{\text{FL 33}}$ Докажите следующую вариацию леммы о накачке для линейных языков:

Лемма. *Для каждого языка $L \subseteq \Sigma^*$, порождаемого линейной грамматикой, существует такая константа $p \geq 1$, что для любой строки $w \in L$, для которой $|w| \geq p$, существует разложение $w = xuyvz$, где $|uv| > 0$ и $|xuvz| \leq p$, для которого $xu^iyv^iz \in L$ при всех $i \geq 0$.*

$\boxed{\text{FL 34}}$ Докажите, что язык Дика (правильных скобочных последовательностей) не порождается линейной грамматикой.

$\boxed{\text{FL 35}}$ Докажите, что класс языков, порождаемых линейными грамматиками, не замкнут относительно конкатенации.

Определение. *Пусть некоторая детерминированная машина Тьюринга T на входе w останавливается за n шагов. Историей вычисления T на входе w называется строка*

$$C_T(w) = w\#C_0\#C_1\# \dots C_{n-1}\$C_n\#C_n^R\#C_{n-1}^R \dots \#C_1^R\#C_0^R,$$

где $C_i = C_i(T, w)$ — конфигурация машины после i шагов вычисления.

Языком всех принимающих вычислений (the language of valid accepting computations) машины T будем называть язык $VALC(T) = \{ C_T(w) \mid w \in L(T) \}$

Известна следующая

Лемма. *Для каждой машины Тьюринга T существует и может быть конструктивно построена по T такая пара однозначных линейных грамматик G_1 и G_2, что $L(G_1) \cap L(G_2) = VALC(T)$ и дополнения языков $L(G_1), L(G_2)$ также порождаются линейными грамматиками.*

$\boxed{\text{FL 36}}$ Докажите, что следующие задачи неразрешимы:

a) "Для данных двух линейных грамматик ответить, является ли пустым пересечение порождаемых ими языков"

b) "Для данной линейной грамматики ответить, является ли она однозначной"

c) "Для данной линейной грамматики ответить, порождает ли она множество всех возможных строк Σ^* "

d) "Для данных двух линейных грамматик ответить, порождают ли они один и тот же язык"

$\boxed{\text{FL 37}}$ Разрешимы ли следующие задачи:

a) "Для данной обыкновенной грамматики ответить, конечно ли множество строк, для которых она задаёт более одного дерева разбора"

b) "Для данных двух обыкновенных грамматик ответить, существует ли такое число $l \geq 0$, что каждая из двух грамматик порождает какую-то строку длины l "

$\boxed{\text{FL 38}}$ Какой класс языков распознают МП-автоматы с двумя стеками?