30 ноября 2017

1. Дан граф G. Постройте для него схему глубины 3, решающую задачу о независимом множестве. Вход этой схемы — это подмножество вершин графа (i-й вход равен 1, когда в подмножество входит i-ая вершина), а выход равен 1 тогда и только тогда, когда набор вершин на входе является независимым множеством. Независимое множество вершин графа — множество, в котором никакие две вершины не являются смежными. В данной задаче гейты могут вычислять отрицание или дизъюнкцию и конъюнкцию любого (возможно, больше 2) числа других гейтов.

2. Покажите, что вычитание двух n-битовых чисел по модулю 2^n выполняется схемой размера $O(n)$ и глубины $O(\log n)$.

3. Докажите, что схема, вычисляющая булеву функцию f от n аргументов, у которой ни один аргумент не является фиктивным, имеет размер не менее cn и глубину не менее $c \log n$, где $c > 0$ — некоторая константа, зависящая от выбранного набора элементов. (Аргумент функции называют фиктивным, если от него значение функции не зависит.)

4. Используя только гейты конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, постройте схемы для
   (a) XOR двух чисел;
   (b) XOR n чисел при помощи не более $5n$ гейтов;
   (c) суммы двух битов;
   (d) суммы двухбитового и однобитового чисел.

5. Определим глубину формул как максимальное число вложенных скобок; для единообразия будем окружать отрицание скобками и писать $(\neg A)$ вместо $\neg A$. Покажите, что минимальная глубина формулы, записывающей некоторую функцию f, совпадает с минимальной глубиной схемы, вычисляющей f.

6. Объясните, почему теорема о связи размеров схем в разных базисах не переносится на случай размера формул.

7. Используя любые бинарные гейты, постройте схемы для
   (a) суммы двух битов при помощи не более 5 гейтов;
   (b) суммы трех битов при помощи не более 5 гейтов;
   (c) суммы n чисел при помощи не более $5n$ гейтов.