

# ПРОГРАММА ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО АУ, четвертый семестр, 2016 год

1. Замкнутые и точные формы. Локальная точность. Пример замкнутой формы, не имеющей первообразной.
2. Первообразная формы вдоль пути.
3. Лемма Лебега. Лемма о первообразной относительно отображения.
4. Гомотопные пути. Интеграл от замкнутой формы по гомотопным путям. Односвязные области. Замкнутость и точность форм в односвязных областях.
5. Голоморфные функции. Условия Коши–Римана. Частные производные  $\frac{\partial}{\partial z}$  и  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ . Гармонические функции.
6. Два доказательства теоремы Коши о дифференциальной форме  $f(z) dz$ .
7. Следствие из теоремы Коши. Модификация теоремы Коши о дифференциальной форме  $f(z) dz$ .
8. Индекс кривой относительно точки. Интегральная формула Коши.
9. Аналитичность голоморфной функции. Следствия.
10. Теорема Морера. Следствия. Теорема об интеграле от  $\frac{f(z)}{z-a}$ .
11. Неравенство Коши. Теорема Лиувилля.
12. Основная теорема алгебры.
13. Теорема о среднем. Следствие.
14. Принцип максимума. Следствие.
15. Ряд Лорана. Кольцо сходимости. Единственность.
16. Ряд Лорана. Существование. Разложение голоморфной в кольце функции в сумму.
17. Особые точки голоморфных функций. Равносильные определения устранимой особой точки.
18. Теорема единственности голоморфной функции (с производными). Аналитическое продолжение функции.
19. Кратность нуля. Множество нулей голоморфной функции. Теорема единственности голоморфной функции.
20. Связь между нулями и полюсами. Характеристика полюса.
21. Теорема Сохоцкого. Формулировка теоремы Пикара.
22. Мероморфные функции. Производные мероморфных функций.
23. Бесконечно удаленная точка. Сфера Римана. Особенность в бесконечно удаленной точке.

Теорема Лиувилля в  $\bar{\mathbb{C}}$ .

24. Вычеты. Теорема о вычетах.
25. Формулы для вычисления вычетов.
26. Вычисление интеграла  $\int_0^\infty \frac{dx}{x^{2n}+1}$ . Лемма Жордана.
27. Лемма о полувывчете. Интеграл в смысле главного значения. Вычисление интеграла  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ .
28. Логарифм. Теорема о существовании логарифма голоморфной функции. Следствия.
29. Вычисление интеграла  $\int_0^\infty \frac{x^{p+1}}{x+1} dx$ .
30. Вычисление интеграла  $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx$ . Сумма ряда из обратных квадратов.
31. Разложение мероморфной функции в сумму.
32. Разложение котангенса в ряд и синуса в бесконечное произведение.
33. Теорема о числе нулей и полюсов.
34. Теорема Руше. Второе доказательство основной теоремы алгебры.
35. Диагонализация степенных рядов и произведение Адамара.
36. Метод Дарбу.
37. Вычисление сумм рядов (общая схема). Пример с рядом из обратных квадратов.
38. Конформные отображения.
39. Теорема о голоморфном образе области.
40. Однолистные функции. Необходимое условие однолистности (в том числе и в окрестности  $\infty$ ).
41. Теорема Римана о конформных отображениях. Доказательство единственности. Обобщение теоремы Лиувилля.
42. Дробно-линейные функции. Свойства. Теорема о функциях из  $H(\bar{\mathbb{C}} \setminus \{z_0\})$ .
43. Общий вид конформных отображений из круга в круг. Сохранение окружностей и прямых при дробно-линейном отображении.
44. Принцип симметрии Римана–Шварца.
45. Функция Жуковского. Области однолистности и образы кругов.
46. Комплексный потенциал для поля скоростей.
47. Поле скоростей точечного источника и вихря. Течение жидкости в криволинейной полуплоскости.
48. Задача обтекания круга и произвольного замкнутого контура.

## ПРИМЕЧАНИЯ

Незнание хотя бы одной из следующих определений и формулировок влечет оценку “неудовлетворительно”: определения точной и замкнутой формы, гомотопных путей, голоморфной функции; условия Коши–Римана; интегральной формулы Коши; теоремы Лиувилля; теоремы единственности; классификации и характеристики особых точек; теоремы о вычетах.