ЛЕММА БЕРНСАЙДА И ЗАДАЧИ О РАСКРАСКАХ

А.В.Степанов

Предисловие

Комбинаторные задачи о количестве объектов, не совмещаемых друг с другом определенными преобразованиями, которые решаются с помощью Леммы Бернсайда, являются наиболее простым приложением теории групп. На самом деле, я считаю, что нельзя уверенно решать не совсем тривиальные комбинаторные задачи, не зная основных идей теории групп. Без теории групп каждая задача превращается в олимпиадную, для решения которой нужна смекалка.

С другой стороны, не надо думать, что теория групп специализируется на решении комбинаторных задач. Различные приложения теории групп в современной науке (в других разделах математики, в физике, в химии, в информатике) настолько же разнообразны насколько и недоступны после полусеместрового курса лекций.

1. Действие группы на множестве

Материал этого параграфа можно найти (с незначительными изменениями) в любой книге, излагающей основы теории групп.

Определение 1.1. Пусть G – группа с нейтральным элементом e, а X – множество. Будем говорить, что G действует на X, если задана операция $G \times X \to G$ (образ пары (g, x) обозначается обычно просто gx), обладающая для любого $x \in X$ и $g, h \in G$ следующими свойствами:

(1) $ex = x$
(2) $g(hx) = (gh)x$

Определение 1.2. Пусть X – множество. Множество всех биективных функций $X \to X$ с операцией композиции называется *симметрической группой* на множестве X и обозначается через S_X.

Заметим, что любой гомоморфизм $\varphi : G \to S_X$ задает действие группы G на множестве X по правилу $gx = \varphi(g)(x)$ (проверьте, что эта операция действительно удовлетворяет условиям определения 1.2). Обратно, если задано действие G на X, то можно задать гомоморфизм $\varphi : G \to S_X$ формулой $\varphi(g)(x) = gx$ (проверьте, что $\varphi(g)$ биекция и что φ – гомоморфизм). Таким образом, можно считать, что действие группы на множестве – это гомоморфизм $G \to S_X$, что и выдвигается в качестве определения действия группы на множестве в некоторых книгах.

Введем теперь некоторые понятия, связанные с действием группы G на множестве X, которые используются в формулировке и доказательстве леммы Бернсайда.

Лемма-Определение 1.3. Орбитой *элемента $x \in X$ под действием G называется множество $Gx = \{gx \mid g \in G\}$. Количество элементов в данной орбите называется* длиной орбиты *(в разных орбитах может быть разное количество элементов).*

Любые две орбиты либо не пересекаются, либо совпадают. Таким образом, множество X разбивается в дизъюнктное объединение орбит.

Доказательство этого утверждения практически совпадает с доказательством аналогичного утверждения для смежных классов.

Определение 1.4. Неподвижными точками элемента $g \in G$ называются те $x \in X$, для которых $gx = x$. *Множество неподвижных точек* элемента g обозначается через X^g.

Определение 1.5. Множество элементов группы G, оставляющих на месте данный элемент $x \in X$ называется *стабилизатором* элемента x и обозначается через $\operatorname{St}(x)$. Другими словами, $\operatorname{St}(x) = \{g \in G \mid gx = x\}$. Очевидно, что стабилизатор является подгруппой в G.

Замечание 1.6. Обратите внимание на то, что количество пар $(g, x) \in G \times X$, для которых $gx = x$ можно вычислить двумя способами, которые указаны в разных частях следующего равенства:

$$\sum_{x\in X} |\operatorname{St}(x)| = \sum_{g\in G} |X^g|.$$

Последнее равенство несмотря на свою очевидность играет важную роль при доказательстве леммы Бернсайда. Второе ключевое соображение приведено в следующей лемме.

Лемма 1.7. *Длина орбиты элемента x равна индексу стабилизатора этого элемента. Поэтому, если группа G конечна, то $|Gx| \cdot |\operatorname{St}(x)| = |G|$.*

Доказательство. Напомним, что индекс подгруппы – это количество (левых) смежных классов по этой подгруппе. Пусть $G/\operatorname{St}(x)$ обозначает множество левых смежных классов. Зададим функцию $f : G/\operatorname{St}(x) \to Gx$ формулой $f\big(g\operatorname{St}(x)\big) = gx$ (очевидно, что правая часть не зависит от выбора представителя смежного класса) и докажем, что f биективна. Сюръективность сразу следует из определения орбиты. Предположим, что $f\big(g\operatorname{St}(x)\big) = f\big(h\operatorname{St}(x)\big)$, т. е. $gx = hx$. Но тогда $h^{-1}gx = x$, откуда $h^{-1}gx \in \operatorname{St}(x)$, а из этого сразу следует, что $g\operatorname{St}(x) = h\operatorname{St}(x)$. Таким образом f биективно отображает $G/\operatorname{St}(x)$ на Gx, а это возможно только если $|G/\operatorname{St}(x)| = |Gx|$. □

2. Лемма Бернсайда

Лемма Бернсайда вычисляет количество орбит действия группы на множестве с помощью суммы по всем элементам группы. Она применяется в том случае, когда порядок множества X намного больше, чем порядок группы G.

Теорема 2.1 (Лемма Бернсайда)**.** *Количество орбит действия группы G на множестве X равно*

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} |X^g|.$$

Доказательство. Обозначим число орбит через N. Каждый элемент $x \in X$ лежит в орбите Gx. Сопоставим ему число $\frac{1}{|Gx|}$. Сумма этих чисел по всем x из данной орбиты $\mathcal{O}$ очевидно равна 1 (мы просто $|\mathcal{O}|$ раз складываем число $\frac{1}{|\mathcal{O}|}$ с самим собой). Поэтому количество орбит можно вычислить по формуле $N = \sum_{x\in X} \frac{1}{|Gx|}$. Подставляя сюда формулу для длины орбиты из леммы 1.7 получим $N = \sum_{x\in X} \frac{|\operatorname{St}(x)|}{|G|} = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in X} |\operatorname{St}(x)|$. Используя формулу из замечания 1.6 получим $N = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} |X^g|$, что и требовалось доказать. □

3. Первый пример: задача о бусах

Рассмотрим сначала простой пример на применение леммы Бернсайда. В решении будет присутствовать несколько лишних деталей, которые будут очевидно следовать из результатов параграфа 4. Это сделано для того, чтобы наглядно продемонстрировать всю теорию.

Задача 3.1. Вычислить количество различных бус из 6 бусинок, каждая из которых может быть одного из трех цветов.

Решение. Уточним условие. Под различными бусами подразумеваются те, которые нельзя совместить друг с другом с помощью поворотов и осевой симметрии. Занумеруем места для бусинок числами от 1 до 6, а цвета – буквами a, b, c. Тогда раскраска – это сопоставление конкретного цвета каждому из мест, т. е. последовательность $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, где $x_k \in \{a, b, c\}$. Очевидно, что всего существует 3^6 таких раскрасок. Естественно, не все раскраски соответствуют различным бусам. Например раскраска, в которой первая бусинка имеет цвет b, а остальные – цвет c, совмещается поворотом с раскраской, у которой вторая бусинка имеет цвет b, а остальные – цвет c.

На множестве X всех раскрасок действует группа поворотов и осевых симметрий. Операция в этой группе – композиция, т. е. последовательное выполнение преобразований (проверьте, что композиция поворота и осевой симметрии равна осевой симметрии относительно другой оси, а композиция двух симметрий относительно различных осей равна повороту). Как обычно, операция композиции является ассоциативной, нейтральным элементом является тождественное отображение, обратным к осевой симметрии является она сама, а обратным к повороту – поворот в обратную сторону. Обозначим эту группу буквой G.

Группа G естественным образом действует на множестве мест $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, то есть задано отображение из G в симметрическую группу S_6. Обозначим через τ поворот, переводящий каждое место в следующее (последнее в первое), а через σ – осевую симметрию относительно оси, проходящей между местами 6 и 1, и 3 и 4. Выпишем перестановки (в циклической форме) из S_6, в которые переходит каждый из элементов группы G.

Элемент	e	τ	τ^2	τ^3	τ^4	τ^5
Перест.	e	(123456)	(135)(246)	(14)(25)(46)	(153)(264)	(654321)

Элемент	σ	$\sigma\tau$	$\sigma\tau^2$	$\sigma\tau^3$	$\sigma\tau^4$	$\sigma\tau^5$
Перест.	(16)(25)(34)	(15)(24)	(14)(23)(56)	(13)(46)	(12)(36)(45)	(26)(35)

Таблица 1.

Далее мы будем отождествлять преобразования с соответствующими им перестановками. Теперь легко задать формулой действие элементов группы G на множестве X:

$$\alpha(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (x_{\alpha^{-1}(1)}, x_{\alpha^{-1}(2)}, x_{\alpha^{-1}(3)}, x_{\alpha^{-1}(4)}, x_{\alpha^{-1}(5)}, x_{\alpha^{-1}(6)}).$$

Например цвет второй бусинки после поворота τ (т. е. поворота бус на 60°) совпадает с цветом первой бусинки до поворота ($\tau(1) = 2$, поэтому $\tau^{-1}(2) = 1$).

Напомним, что раскраски, совмещаемые друг с другом каким-нибудь преобразованием из группы G задают одинаковые бусы. В терминологии из параграфа 1 раскраски задают одинаковые бусы тогда и только тогда, когда они лежат в одной орбите под действием G. Таким образом, задача состоит в том, чтобы вычислить количество орбит действия G на X.

Для того, чтобы воспользоваться леммой Бернсайда, необходимо выяснить, сколько элементов множества X оставляет на месте каждый элемент группы G. Очевидно, $|X^e| = |X| = 3^6$. Так как поворот τ переводит друг в друга соседние элементы, то у раскраски, не изменяющейся при этом повороте, любые две соседних бусинки должны иметь один и тот же цвет. Отсюда следует, что все бусинки такой раскраски имеют один цвет, откуда $|X^\tau| = 3$. То же рассуждение относится и к элементу τ^5, следовательно $|X^{\tau^5}| = 3$ (вообще, взаимно обратные элементы группы всегда сохраняют одни и те же элементы множества).

В общем случае, те бусинки, которые элемент группы переставляет по циклу, имеют один и тот же цвет тогда и только тогда, когда элемент группы сохраняет раскраску. Поэтому количество цветов, которые надо выбрать для получения раскраски, сохраняемой элементом группы, равно количеству независимых циклов в перестановке, соответствующей этому элементу (при этом учитываются циклы длины 1, которые не выписаны в таблице 1). Для элемента $\alpha \in G$ обозначим это число через $c(\alpha)$. Так как по условию бусинки можно красить в один из трех цветов, то $c(\alpha)$ цветов можно выбрать $3^{c(\alpha)}$ способами. Таким образом, $3^{c(\alpha)}$ – это и есть количество раскрасок, не меняющихся под действием элемента α. Получим:

$$|X^\tau| = |X^{\tau^5}| = 3^1$$
$$|X^{\tau^2}| = |X^{\tau^4}| = 3^2$$
$$|X^{\sigma\tau}| = |X^{\sigma\tau^3}| = |X^{\sigma\tau^5}| = 3^4$$
$$|X^{\tau^3}| = |X^{\sigma}| = |X^{\sigma\tau^2}| = |X^{\sigma\tau^4}| = 3^3$$

Наконец, по лемме Бернсайда количество различных бус (число орбит) равно

$$\frac{1}{12}(3^6 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^4 + 4 \cdot 3^3) = 92.$$

□

4. Задачи о раскрасках: общие сведения

В этом параграфе наблюдения из предыдущего примера будут аккуратно сформулированы и доказаны для общего случая задачи о раскрасках, так что решение таких задач будет почти полностью алгоритмизировано.

Определение 4.1. Пусть I – произвольное множество, а C – множество цветов. Раскраской множества I называется функция из I в C. Множество всех раскрасок обозначается через C^I (это стандартное обозначение для множества всех функций из I в C, отражающее тот факт, что количество таких функций равно $|C|^{|I|}$).

Лемма-Определение 4.2. *Пусть G группа, действующая на множестве I. Тогда формула*

$$gf(i) = f(g^{-1}i),$$

где $g \in G,\ \ i \in I$, а $f \in C^I$, задает действие G на C^I.

Доказательство. $(gh)f(i) = f\big((gh)^{-1}i\big) = f\big(h^{-1}g^{-1}i\big)$. С другой стороны, $g(hf)(i) = hf\big(g^{-1}i\big) = f\big(h^{-1}g^{-1}i\big)$, что доказывает второе свойство из определения 1.2. Первое свойство очевидно. □

Как было сказано в параграфе 1, действие группы на множестве I задает гомоморфизм $\varphi : G \to S(I)$.

Лемма 4.3. *Для элемента $g \in G$ и функции $f \in C^I$ следующие условия эквивалентны:*

(1) *$gf = f$;*
(2) *$f(i) = f(g^n i)$ для всех $i \in I$ и $n \in \mathbb{Z}$;*
(3) *Если $i, j \in I$ лежат в одном цикле в циклической записи перестановки $\varphi(g)$, то $f(i) = f(j)$ (в терминологии задачи о бусах это означает, что все места из одного цикла покрашены в одинаковый цвет).*

Доказательство. Элементы $i, j \in I$ лежат в одном цикле в циклической записи перестановки $\varphi(g)$ тогда и только тогда, когда $j = g^n i$ для некоторого целого n. Действительно, соседние элементы цикла по определению циклической записи переводятся друг в друга элементами g и g^{-1}. Поэтому (2) $\iff$ (3).

Если $gf = f$, то и $g^{-1}f = f$, и по индукции легко получить, что $g^n f = f$ для всех целых n. Тогда $f(i) = g^{-n}f(i) = f(g^n i)$. Обратно, если выполнено (2), то $f(i) = f(g^{-1}i) = gf(i)$, т. е. $f = gf$. □

Замечание 4.4. Теоретически пункт 3 последней леммы имеет смысл всегда, хотя для приложений интересно рассматривать циклическую запись перестановки только если множество I конечно. Иначе или циклов будет бесконечное число, или хотя бы один цикл будет иметь бесконечную длину.

Как и при решении задачи 3.1 обозначим через $c(\sigma)$ количество независимых циклов в записи перестановки σ (считая циклы длины 1).

Следствие 4.5. *Количество раскрасок из C^I, которые сохраняет данный элемент $g \in G$ равно $|C|^{c(\varphi(g))}$.*

Доказательство. Обозначим через $\langle g\rangle i$ орбиту элемента i под действием циклической подгруппы, порожденной g (очевидно, что соответствующим образом упорядоченные элементы такой орбиты – это и есть цикл перестановки $\varphi(g)$). Пусть Q – множество различных орбит. Если $gf = f$, то из леммы известно, что все элементы одной орбиты отображаются в одно и то же под действием функции f. Поэтому f однозначно определяется функцией $\tilde{f} : Q \to C$, где $\tilde{f}(\langle g\rangle i) = f(i)$. Другими словами, множество $\big(C^I\big)^g$ биективно отображается на множество C^Q, а значит эти множества имеют одинаковое количество элементов. Количество всех функций из Q в C равно $|C|^{|Q|}$, при этом $|Q| = c(\varphi(g))$, что завершает доказательство. □

Таким образом, для того чтобы посчитать количество раскрасок при помощи леммы Бернсайда достаточно уметь находить циклический тип каждой перестановки. В некоторых задачах это можно делать, не выписывая сами элементы. Рассмотрим вопрос: как, зная циклический тип перестановки σ, найти циклический тип перестановки σ^n не вычисляя ее.

Лемма 4.6. *Предположим, что σ является циклом длины k, а НОД$(k,n) = d$. Тогда перестановка σ^n является произведением d циклов длины ${}^k\!/_d$.*

Доказательство. Из условия следует, что для любого i, не являющегося неподвижным относительно σ, число k является наименьшим таким, что $\sigma^k i = i$. Предположим, что m – наименьшее число, обладающее свойством $(\sigma^n)^m i = i$. Тогда mn делится на k (в противном случае $d' = \text{НОД}(k, mn) < k$, а из линейного представления НОД следует, что $\sigma^{d'} i = i$, что противоречит минимальности k). Следовательно, m должно делится на ${}^k\!/_d$. Из минимальности m получаем, что $m = {}^k\!/_d$. Таким образом, в циклической записи перестановки σ^n любой не неподвижный элемент i лежит в цикле длины ${}^k\!/_d$. Так как всего таких элементов k штук, а каждый цикл состоит из ${}^k\!/_d$ элементов, то σ^n является произведением d циклов. □

Другим соображением, помогающим определить количество независимых циклов в записи некоторой перестановки σ, является понятие *фундаментальной области*. С формальной точки зрения, фундаментальной областью перестановки σ называется набор представителей циклов, т. е. подмножество $I_\sigma \subseteq I$, пересекающееся с каждым циклом по одному элементу. Другими словами, для каждого $i \in I$ существует единственное целое число n такое, что $\sigma^n i \in I_\sigma$. Естественно, количество независимых циклов в разложении σ равно $|I_\sigma|$.

Неформально, фундаментальная область – это такое подмножество в I, что раскраски этого помножества однозначно соответствуют раскраскам, неподвижным по действием преобразования σ. Например, если I – это множество мест в матрице 5×5, а σ – поворот на $90°$, то в качестве фундаментальной области можно взять набор мест с номерами $(1,1)$; $(1,2)$; $(1,3)$; $(2,1)$; $(2,2)$; $(2,3)$; $(3,3)$. Действительно, можно покрасить эти места в любые цвета, а цвета остальных мест узнать, поворачивая этот набор на $90°$, $180°$ и $270°$.

5. Задача о компостере

В качестве следующего примера приведем сложную задачу, при решении которой кроме леммы Бернсайда придется пользоваться еще и принципом включения–исключения.

В 1980-е годы система оплаты проезда в общественом транспорте была следующей: пассажир покупал (заранее) талоны на проезд, а при входе в транспорт должен был пробить в нем дырки с помощью компостера, который висел на стене. Компостер пробивал несколько дырок в прямоугольнике $m \times n$ (по-моему 4×5, но я точно не помню). При этом пассажир мог вставить талон в компостер любой стороной (т. е. допускались повороты на $90°$, $180°$ и $270°$, а также осевые симметрии). Кроме того, он мог сдвинуть талон немного в сторону с одним условием, чтобы все дырки были пробиты.

Задача 5.1. Сколько существует компостеров, которые пробивает различимые комбинации дырок?

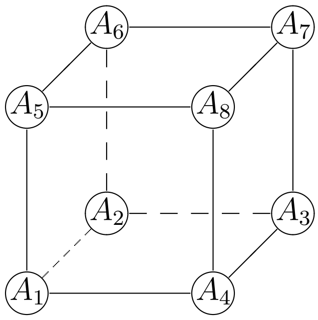
Решение. To appear. □

6. Группа вращений куба

Для решения вариантов задания про количество раскрасок необходимы сведения про представление перестановками элементов некоторых конкретных групп. Для того чтобы уравнять сложность различных вариантов, некоторые сведения про группу вращений куба приводятся в этом параграфе.

Известно (принимаем это без доказательства), что вращение куба однозначно определяется перестановкой его больших диагоналей, и каждая перестановка диагоналей реализуется каким-то вращением. Так как у куба 4 больших диагоналей, то сказанное выше означает, что группа вращений куба изоморфна симметрической группе S_4. Для решения задач про раскраску вершин (граней, ребер) куба необходимо реализовать эту группу в группе перестановок вершин (граней, ребер), т.е. в группе S_8 (соответственно, S_6, S_{12}). Частично эта задача и решена в приведенной ниже таблице.

Для построения таблицы введем обозначения для вершин, больших диагоналей, граней и ребер куба $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$.



Обозначим большие диагонали:

$$d_1 = A_1A_7, \qquad d_2 = A_2A_8, \qquad d_3 = A_3A_5, \qquad d_4 = A_4A_6;$$

грани

$$\begin{aligned} &f_1 = A_1A_2A_3A_4, \qquad && f_2 = A_1A_2A_6A_5, \qquad && f_3 = A_2A_3A_7A_6,\\ &f_4 = A_3A_4A_8A_7, && f_5 = A_4A_1A_5A_8, && f_6 = A_1A_2A_3A_4; \end{aligned}$$

и ребра:

$$\begin{aligned} &e_1 = A_1A_2, \quad e_2 = A_2A_3, \quad e_3 = A_3A_4, \quad e_4 = A_4A_1, \quad e_5 = A_1A_5, \quad e_6 = A_2A_6,\\ &e_7 = A_3A_7, \quad e_8 = A_4A_8, \quad e_9 = A_5A_6, \quad e_{10} = A_6A_7, \quad e_{11} = A_7A_8, \quad e_{12} = A_8A_5. \end{aligned}$$

В следующей таблице все перестановки записаны в циклической форме, т.е. $(d_1d_2d_3)$ означает, что данное вращение перемещает диагональ d_1 в d_2, d_2 в d_3, d_3 в d_1, а d_4 оставляет на месте (вращение куба вокруг диагонали d_4).

S_4 (диаг.)	S_8 (вершины)	S_6(грани)	S_{12} (ребра)
e	e	e	e
(d_1d_2)	$(A_1A_2)(A_7A_8)(A_4A_6)(A_3A_5)$	$(f_1f_2)(f_3f_5)(f_4f_6)$	$(e_2e_5)(e_3e_9)(e_4e_6)(e_7e_{12})(e_8e_{10})$
(d_1d_3)	$(A_1A_5)(A_3A_7)(A_4A_6)(A_2A_8)$	$(f_1f_6)(f_2f_5)(f_3f_4)$	$(e_1e_{12})(e_2e_{11})(e_3e_{10})(e_4e_9)(e_6e_8)$
(d_1d_4)	$(A_1A_4)(A_7A_6)(A_2A_8)(A_3A_5)$	$(f_1f_5)(f_2f_4)(f_3f_6)$	$(e_1e_8)(e_2e_{12})(e_3e_5)(e_6e_{11})(e_7e_9)$
(d_2d_3)	$(A_2A_3)(A_5A_8)(A_4A_6)(A_1A_7)$	$(f_1f_3)(f_2f_4)(f_5f_6)$	$(e_1e_7)(e_3e_6)(e_4e_{10})(e_5e_{11})(e_8e_9)$
(d_2d_4)	$(A_2A_6)(A_4A_8)(A_3A_5)(A_1A_7)$	$(f_1f_6)(f_2f_3)(f_4f_5)$	$(e_1e_{10})(e_2e_9)(e_3e_{12})(e_4e_{11})(e_5e_7)$
(d_3d_4)	$(A_3A_4)(A_5A_6)(A_2A_8)(A_1A_7)$	$(f_1f_4)(f_3f_5)(f_2f_6)$	$(e_1e_{11})(e_2e_8)(e_4e_7)(e_5e_{10})(e_6e_{12})$
$(d_1d_2)(d_3d_4)$			
$(d_1d_3)(d_2d_4)$			
$(d_1d_4)(d_2d_3)$			
$(d_1d_2d_3)$			σ
$(d_1d_3d_2)$			
$(d_1d_2d_4)$			
$(d_1d_4d_2)$			
$(d_1d_3d_4)$			
$(d_1d_4d_3)$			
$(d_2d_3d_4)$			
$(d_2d_4d_3)$			
$(d_1d_2d_3d_4)$			τ
$(d_1d_4d_3d_2)$			
$(d_1d_3d_2d_4)$			
$(d_1d_4d_2d_3)$			
$(d_1d_2d_4d_3)$			
$(d_1d_3d_4d_2)$			

Если Вам кажется, что большая часть клеток таблицы не заполнены, то Вы ошибаетесь: заполнено даже слишком много! Дело в том, что все остальные клетки легко заполнить без всякого пространственного воображения, картинки куба и т.п. Достаточно просто уметь перемножать перестановки. Например, для того чтобы заполнить клетку с буквой σ достаточно разложить перестановку $(d_1d_2d_3)$ в произведение транспозиций $(d_1d_2d_3) = (d_1d_2)(d_2d_3)$, после чего перемножить перестановки, стоящие в соответствующих местах последнего столбца:

$$\sigma = (e_2e_5)(e_3e_9)(e_4e_6)(e_7e_{12})(e_8e_{10}) \cdot (e_1e_7)(e_3e_6)(e_4e_{10})(e_5e_{11})(e_8e_9) = \\ = (e_1e_{12}e_7)(e_2e_5e_{11})(e_3e_4e_8)(e_6e_9e_{10}).$$

Для примера найдем еще перестановку τ. Так как $(d_1d_2d_3d_4) = (d_1d_2d_3)(d_3d_4)$, то

$$\tau = \sigma \cdot (e_1e_{11})(e_2e_8)(e_4e_7)(e_5e_{10})(e_6e_{12}) = (e_1e_2e_3e_4)(e_5e_6e_7e_8)(e_9e_{10}e_{11}e_{12}).$$

Данное правило заполнения таблицы построено на следующем соображении. Представление группы G вращений куба в группах S_n несомненно является гомоморфизмом $\alpha_k : G \to S_n$, так как последовательному выполнению вращений очевидно соответствует последовательное выполнение перестановок (здесь $k = 1, 2, 3, 4$ обозначает номер столбца, а $n = 4, 8, 6, 12$, соответственно). Так как отображение из G в группу перестановок больших диагоналей (которую мы отождествляем с S_4) является изоморфизмом (как раз этот факт мы приняли без доказательства), то существует обратное отображение $\varphi : S_4 \to G$ также являющееся изоморфизмом. Тогда отображение, $\psi_k : S_4 \to S_n$ является композицией гомоморфизмов $\psi_k = \alpha_k \circ \varphi$, поэтому также является гомоморфизмом. Следовательно, например,

$$\tau = \psi_4\big((d_1d_2d_3d_4)\big) = \psi_4\big((d_1d_2d_3)(d_3d_4)\big) = \psi_4\big((d_1d_2d_3)\big)\psi_4\big((d_3d_4)\big) = \sigma \cdot \eta$$

где $\eta = (e_1e_{11})(e_2e_8)(e_4e_7)(e_5e_{10})(e_6e_{12})$ – элемент 4-го столбца, стоящий в той же строке, что и (d_3d_4).

Так как отображения ψ_k являются гомоморфизмами, то, в частности, элементы одной строки имеют одинаковый порядок, что очень помогает при проверке перемножения перестановок. Например, можно было заранее сказать без всяких вычислений, что перестановка σ будет произведением 3-циклов. Это соображение и тот факт, что для решения задачи о раскрасках важно только *количество* независимых циклов, надеюсь, не позволит Вам ошибиться.

Замечание 6.1. В обозначениях перестановок в таблице циклы длины 1 не выписаны, как это принято делать. Однако при подсчете количества независимых циклов эти циклы *необходимо учитывать*. Например, перестановка $(e_2e_5)(e_3e_9)(e_4e_6)(e_7e_{12})(e_8e_{10})$ из группы S_{12} является произведением 7 независимых циклов.

Содержание