

Коммуникационная сложность II.

13 апреля 2017 г.

1. Если для функции существует коммуникационный протокол с ℓ листьями, то существует протокол с глубиной $O(\log \ell)$.
2. Докажите, что для любой булевой функции f и любого распределения μ существует протокол Π для R_f : $IC_\mu^{int}(\Pi) \leq 2 \log n$.
3. Будем называть *универсальным отношением* для строк длины n отношение $U_n = \{(x, y, i) \mid x, y \in \{0, 1\}^n, x_i \neq y_i\}$ (это обобщение понятия отношения Карчмера-Вигдерсона). Будем называть *расширенным универсальным отношением* для строк длины n отношение $U'_n = U_n \cup \{(x, x, \perp) \mid x \in \{0, 1\}^n\}$ (решая коммуникационную задачу для расширенного универсального отношения Алиса и Боб могут получить *одинаковые* строки и тогда они должны ответить \perp).

Докажите следующие утверждения:

- (a) $4 \cdot L(U_n) \geq L(U'_n) \geq L(U_n)$.
 - (b) $L(U'_n) \geq 2^n$.
4. Пусть $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ некоторая булева функция. Определим функцию $(\vee_m \circ f) : \{0, 1\}^{m \times n} \rightarrow \{0, 1\}$ следующим образом:

$$(\vee_m \circ f)(x_1, x_2, \dots, x_m) = f(x_1) \vee f(x_2) \vee \dots \vee f(x_m),$$

где $x_i \in \{0, 1\}^n$ (т.е. мы определили композицию функция \vee_m и f). Докажите, что $L(\vee_m \circ f) = m \cdot L(f)$.

5. Докажите, что $D(MED) = O(\log n)$.