

Комбинаторный смысл сложения и умножения производящих функций.

5 мая 2017 г.

1. Пусть $F(z) = 2e^z$ и $G(z) = 2e^z$ есть пара экспоненциальных функций, описывающих множества A и B . Предположим, что пересечение этих множеств описывается экспоненциальной функцией e^z . Чему равна экспоненциальная производящая функция, описывающая объединение этих двух множеств?
2. Дать комбинаторное доказательство рекуррентного соотношения $D_{n+1} = n(D_n + D_{n-1})$.
3. Доказать, что D_n есть ближайшее к $n!e^{-1}$ целое число при $n \geq 1$.
4. Сосчитать количество чисел, состоящих из n цифр, таких, что все цифры нечетные, а цифры 1 и 3 присутствуют в числе не менее одного раза.
5. Определить количество способов размещения n различных для нас гостей по трем различным же столам при условии, что за первым столом должен сидеть хотя бы один гость, за вторым столом должно сидеть только нечетное, а за третьим — четное число гостей.
6. В футбольной команде n игроков. Тренер разбивает команду на две группы и просит каждую из групп выстроиться в линию. Затем он первой группе игроков раздает красные футболки. Во второй группе любой из игроков может выбрать футболку одного из трех цветов — оранжевую, белую или зеленую. Сколько существует различных способов совершить все эти действия?
7. Подсчитать количество различных целочисленных решений уравнения

$$a + b + c = 6, \quad -1 \leq a \leq 2, \quad 1 \leq b, c \leq 4.$$

8. Хорошо известно, что любое число можно единственным образом записать в двоичной системе счисления. Дать комбинаторное доказательство данного факта на языке производящих функций.
9. Мы знаем, что при фиксированном параметре n производящая функция для чисел $\binom{n}{k}$ равна $(1+z)^n$. Чему равна обыкновенная производящая функция для этих чисел $\binom{n}{k}$ в случае, если мы вместо n зафиксируем параметр k ? Можно ли записать для этих чисел экспоненциальную производящую функцию при фиксированном параметре k ?
10. Поступающий в университет должен сдать четыре различных экзамена. Сколько есть вариантов успешно сдать экзамены и поступить, если проходной балл равен семнадцати?
11. Сколькими способами можно составить вес в 78 грамм, пользуясь восемью гирьками в 1, 1, 2, 5, 10, 10, 20 и 50 грамм? При этом считается, что гирьки одного веса различаются между собой (например, покрашены в разные цвета).
12. Имеется набор, состоящий из 32 различных карт, 30 из которых разбиты на три группы по десять карт. Каждая группа карт окрашена в свой цвет. Кроме того, внутри каждой группы каждой карте присвоен свой номер от 1 до 10. Две оставшиеся карты в колоде — джокеры двух различных цветов, каждому из которых присвоен номер 0. Вытаскивая карту из колоды, игрок получает 2^k очков, где k — номер, присвоенный карте. Цель игры состоит в том, чтобы набрать 2004 очка. Сколькими способами это можно сделать?
13. Имеются четыре одинаковые колоды, каждая из которых содержит 52 карты. Мы выбираем из этих колод пять карт. Выборки совпадают, если у нас на руках оказывается пять карт одной масти и одного достоинства. Сколько существует различных выборок, состоящих из пяти карт? Получить ответ как с помощью производящих функций, так и с помощью прямых комбинаторных рассуждений.