Гамильтоновы циклы

Домашнее задание №3

22 сентября 2017 г.

Обязательная часть

1. (1.5 балла). Доказать, что любой сильно связный турнир T, построенный на n вершинах, содержит циклы длины $3, 4, \ldots, n$. Следствием этого утверждения является, в частности, тот факт, что в любом сильно связном графе существует гамильтонов цикл.
2. (2.5 балла). Возможно ли удалить в графе Петерсена ребра так, чтобы в полученном в результате удаления этих ребер связном графе G существовал эйлеров цикл?
3. (2 балла). Доказать, что для шахматной доски размерами 3×8 невозможно конем обойти все клетки доски, проходя каждую клетку лишь один раз и вернувшись в ту клетку, с которой начался обход.
4. (1.5 балла). Доказать существование гамильтонова цикла в k-кубе Q_k. Подсчитать количество таких гамильтоновых циклов.
5. (0.5 балла). Доказать, что любой турнир T либо сильно связный, либо может быть превращен в таковой изменением ориентации только лишь одного ребра.
6. (1 балл). Доказать, что среди $n > 3$ вершин сильно связного турнира T найдутся по крайней мере две вершины x, такие, что орграф $T - x$ остается сильно связным.
7. (1.5 балла). Пусть T есть турнир, построенный на 7 вершинах, каждая из которых имеет исходящую степень, равную трем. Доказать, что в таком орграфе найдутся два вершинно несвязанных цикла.

Дополнительная часть

1. (2.5 балла). Обозначим через $h(D)$ количество гамильтоновых путей в простом орграфе D. Доказать, что для орграфа D и орграфа $\bar{D}$, являющегося дополнением к D до полного орграфа, построенного на n вершинах (то есть орграфа, в котором любые две вершины соединены между собой парой разнонаправленных ребер), справедливо равенство

$$h(D) \equiv h(\bar{D}) \pmod 2.$$

2. (2 балла). Доказать, что любой турнир имеет нечетное количество гамильтоновых путей.