

### ДЗ на 3 марта

- 1) Рассмотрим множество векторов в  $\mathbb{R}^n$  с нулевой суммой координат. Докажите, что это подпространство, найдите его размерность и укажите его базис.
- 2) Сколькими способами можно выбрать а) двумерное б)  $k$ -мерное подпространство в  $n$ -мерном пространстве над полем  $F_p$  вычетов по модулю  $p$ ? Сколькими способами можно выбрать прямую?
- 3)  $K$  — поле.  $f_0, f_1 \dots f_n \in K[x]_n$ . (a)  $\deg(f_i) = i \forall i$ . Докажите, что  $f_i$  образуют базис пространства  $K[x]_n$  — многочленов степени не выше  $n$ . (b)  $\deg(f_i) = i \forall i \neq k$ .  $\deg(f_k) < k$  при некотором  $k$ . Докажите, что  $f_i$  не образуют базис пространства  $K[x]_n$ .
- 4) Пусть  $\mathbb{F}_2^n$  — векторное пространство над  $\mathbb{F}_2$  — полем из 2 элементов (a) Является ли базисом множество строк, содержащих ровно один ноль? (b) Существуют ли  $n - 1$ -мерное подпространство, не содержащее строк ровно с одной единицей? (c) Тот же вопрос про строки ровно с двумя единицами.
- 5) В офисе обитает поровну слабохарактерных сексистов и богических богинь, причём каждая богическая богиня обожает четное число слабохарактерных сексистов. Доказать, что можно отбросить некоторое количество богических богинь, так, чтобы каждый слабохарактерный сексист был обожаем чётным числом богических богинь.
- 6) Рассмотрим пространство многочленов над полем  $K$  степени не выше 3 (как пространство над  $K$ ). Существует ли такой базис, что любой многочлен  $f$  в этом базисе имеет координаты  $(f(0), 2f(1), 3f(2), 4f(3))$ ? Тот же вопрос для координат  $((f(0) + 1, f(1), f(2) + f(3), f(4)))$ .
- 7) Дано  $n + 2$  вектора в  $n$ -мерном пространстве. Докажите, что существует их нетривиальная комбинация с нулевой суммой коэффициентов, равная нулю.