Теория категорий

Функторы и естественные преобразования

Валерий Исаев

30 марта 2018 г.

План лекции

Функторы
- Определение
- (Ко)пределы
- Изоморфизм категорий

Подкатегории

Естественные преобразования

Определение функторов

- Функторы между категориями $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ – это морфизмы категорий.
- Функтор F состоит из функции $F : Ob(\mathbf{C}) \to Ob(\mathbf{D})$ и функций $F : Hom_{\mathbf{C}}(X, Y) \to Hom_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$ для всех $X, Y \in Ob(\mathbf{C})$.
- Эти функции должны сохранять тождественные морфизмы и композиции:

$$F(id_X) = id_{F(X)}$$

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

Забывающие функторы

- Забывающий функтор $\mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$, сопоставляющий каждой группе множество ее элементов.
- Для других алгебраических структур тоже существуют забывающие функторы $\mathbf{Ring} \to \mathbf{Set}$, $\mathbf{Ab} \to \mathbf{Set}$, и так далее.
- Можно задавать функторы, которые забывают не всю информацию.
- Например, существует два забывающих функтора $\mathbf{Ring} \to \mathbf{Grp}$ и $\mathbf{Ring} \to \mathbf{Ab}$.

Примеры функторов

- Функторы между категориями предпорядков – это в точности монотонные функции.
- Если M и N – пара моноидов, и $\mathbf{C}_M$ и $\mathbf{C}_N$ – категории на одном объекте, соотетствующие этим моноидам, то функторы между $\mathbf{C}_M$ и $\mathbf{C}_N$ – это в точности гомоморфизмы моноидов M и N.
- Пусть $\mathbf{C}$ – декартова категория и A – объект $\mathbf{C}$, тогда $A \times - : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ – функтор, сопоставляющий каждому объекту B объект $A \times B$ и каждому морфизму $f : B \to B'$ морфизм $id_A \times f : A \times B \to A \times B'$.
- Существует очевидный функтор $I : \mathbf{Agda} \to \mathbf{Set}$.
- Функторам в агде соответствуют функторы $\mathbf{Agda} \to \mathbf{Agda}$.

Функторы и дуальность

- Каждому функтору $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ можно сопоставить функтор $F^{op} : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{D}^{op}$.
- Другими словами существует биекция между множествами функторов $\mathbf{C} \to \mathbf{D}$ и $\mathbf{C}^{op} \to \mathbf{D}^{op}$.
- С другой стороны, функторы вида $\mathbf{C}^{op} \to \mathbf{D}$ никак не связаны с функторами вида $\mathbf{C} \to \mathbf{D}$.
- Первые называются контравариантными функторами, а вторые – ковариантными.

Пределы и копределы функторов

- Для любого функтора $F : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ можно определить понятие предела $lim\ F$ и копредела $colim\ F$. Определение такое же как и для диаграмм.
- Категории $\mathbf{J}$ можно рассматривать как обобщение графов, а функтор $F : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ – как обощение диаграмм в $\mathbf{C}$.
- Любой диаграмме можно сопоставить функтор, и наоборот. (Эти конструкции не взаимообратные)
- Но пределы и копределы соответствующих диаграмм и функторов будут совпадать.
- Функторы $F : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ тоже называют диаграммами.

Индуктивные типы данных

- Допустим мы хотим описать объект в произвольной категории, являющийся аналогом какой-либо структуры данных (списки, деревья, и так далее).
- В теории множеств они строятся индуктивно, то есть мы сначала определяем, скажем, множества $L_n(A)$ списков длины не больше n, а потом говорим, что множество всех списков – это объединение множеств конечных списков $L(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n(A)$.
- В теории категорий можно сделать аналогичную конструкцию.
- Во-первых, определим объект $L_n(A)$ списков длины не больше n следующим образом:

$$1 + A + A^2 + \ldots + A^n$$

Примеры бесконечных (ко)пределов

- Теперь мы можем определить объект L как следующий копредел:
$$L_0 \to L_1 \to L_2 \to \dots$$
- Рассмотрим вместо копредела следующий предел:
$$\dots \to L_2 \to L_1 \to L_0$$
где функция $L_{n+1} \to L_n$ сопоставляет каждому списку $[x_1, \dots x_{n+1}]$ список $[x_2, \dots x_{n+1}]$, а остальные списки не меняет.
- Тогда предел этой последовательности – это множество (потенциально) бесконечных списков.

Общее определение индуктивных типов данных

- Любой (ко)индуктивный тип данных можно задать в виде функтора $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$.
- Функтор, соответствующий, спискам определяется как $L_A(X) = 1 + A \times X$.
- Функтор, соответствующий, бинарным деревьям определяется как $T_A(X) = 1 + A \times X \times X$.
- Для любого такого функтора можно определить объекты $D_n = F^n(0)$.
- Тогда существуют очевидные морфизмы $D_n \to D_{n+1}$.
- Теперь мы можем определить объект D, соответствующий функтору F как копредел

$$D_0 \to D_1 \to D_2 \to \dots$$

Общее определение коиндуктивных типов данных

- Дуальным образом мы можем определить коиндуктивный тип данных, соответствующий функтору $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ как предел

$$\ldots \to F^n(1) \to \ldots \to F^2(1) \to F(1) \to 1$$

- Разница между индуктивными и коиндуктивными типами данных не очень большая: индуктивные структуры всегда конечны, а коиндуктивные могут быть бесконечны.
- Так в агде используются индуктивные типы данных, а в хаскелле коиндуктивные.

Изоморфные категории

- Для любой категории $\mathbf{C}$ существует тождественный функтор $Id_{\mathbf{C}} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, отправляющий каждый объект и морфизм в себя.
- Если $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ и $G : \mathbf{D} \to \mathbf{E}$, то функтор $G \circ F : \mathbf{C} \to \mathbf{E}$ определяется на объектах и на морфизмах как композиция F и G.
- Композиция функторов – ассоциативна, тождественный функтор является единицей для композиции.
- Функтор $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ называется *изоморфизмом* категорий, если существует функтор $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ такой, что $G \circ F = Id_{\mathbf{C}}$ и $F \circ G = Id_{\mathbf{D}}$.
- Категории $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ *изоморфны*, если существует изоморфизм $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$.

Злые понятия

- Как правило, имея две группы, не имеет смысла спрашивать равны ли они; нужно спрашивать об их изоморфности.
- Это верно для объектов в любой категории.
- Любое понятие, которое говорит о равенстве объектов некоторой категории, называют *злым*.
- Изоморфизм категорий – злое понятие.

План лекции

Функторы

- Определение
- (Ко)пределы
- Изоморфизм категорий

Подкатегории

Естественные преобразования

Подкатегории

- *Подкатегория* $\mathbf{C}'$ категории $\mathbf{C}$ – это подкласс объектов $\mathbf{C}$ и для каждой пары объектов X, Y в $\mathbf{C}'$ подкласс множества $Hom_{\mathbf{C}}(X, Y)$ такие, что $\mathbf{C}'$ содержит тождественные морфизмы для любого $X \in \mathbf{C}'$ и замкнут относительно композиции.
- Функтор $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ называется *строгим* (*faithful*), если для любых $X, Y \in Ob(\mathbf{C})$ функция $F : Hom_{\mathbf{C}}(X, Y) \to Hom_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$ инъективна.
- Подкатегории категории $\mathbf{C}$ – классы эквивалентности строгих инъективных на объектах функторов.
- Проблема этого определения заключается в том, что оно не стабильно относительно изоморфизмов объектов $\mathbf{C}$ (то есть, X может принадлежать $\mathbf{C}'$, а изоморфный ему объект Y – нет).

Полные подкатегории

- Подкатегория $\mathbf{C}'$ категории $\mathbf{C}$ называется *полной*, если для любых объектов X, Y в $\mathbf{C}'$ множества $Hom_{\mathbf{C}'}(X, Y)$ и $Hom_{\mathbf{C}}(X, Y)$ равны.
- Функтор $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ называется *полным*, если для любых $X, Y \in Ob(\mathbf{C})$ функция $F : Hom_{\mathbf{C}}(X, Y) \to Hom_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$ сюръективна.
- Полные подкатегории категории $\mathbf{C}$ – классы эквивалентности полных строгих функторов.
- Теперь необязательно требовать инъективность на объектах.
- Полные строгие функторы мы будем называть *вложениями* категорий.

Примеры

- **FinSet** – полная подкатегория **Set**.
- **Ab** – полная подкатегория **Grp**.
- Категория частичных порядков – полная подкатегория предпорядков.
- Категория предпорядков вкладывается в категорию категорий.
- Категория моноидов вкладывается в категорию категорий.
- Существует не полное вложение **Agda** в **Set**.
- Все забывающий функторы, которые мы рассматривали, являются строгими.
- Обратное тоже верно: любой строгий функтор является в некотором смысле забывающим.

План лекции

Определение

- Можно определить понятие морфизма между функторами $F, G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$.
- *Естественное преобразование* $\alpha : F \to G$ – это функция, сопоставляющая каждому объекту X из $\mathbf{C}$ морфизм $\alpha_X : F(X) \to G(X)$, удовлетворяющая условию, что для любого морфизма $f : X \to Y$ в $\mathbf{C}$ следующий квадрат коммутирует:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

Категория функторов

- Естественных преобразование отображает только объекты, но можно показать, что оно задает действие и на морфизмах.
- Если $\alpha : F \to G$ – естественное преобразование, то каждому морфизму $f : X \to Y$ в $\mathbf{C}$ можно сопоставить морфизм $\alpha_f : F(X) \to G(Y)$ в $\mathbf{D}$.
- Морфизм α_f определяется как композиция $F(f) \circ \alpha_Y$, что равно $\alpha_X \circ G(f)$ по естественности.
- Этот морфизм – это диагональ в коммутативном квадрате, который появляется в определении естественности.

Композиция естественных преобразований

- Если $\alpha : F \to G$ и $\beta : G \to H$ – пара естественных преобразований, то можно определить их композицию $\beta \circ \alpha : F \to H$ как функцию, сопоставляющую каждому X из $\mathbf{C}$ морфизм $\beta_X \circ \alpha_X : F(X) \to H(X)$.
- Композиция $\beta \circ \alpha$ – естественна:

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[r, "\beta_X"] \arrow[d, "G(f)"] & H(X) \arrow[d, "H(f)"] \\
F(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"'] & G(Y) \arrow[r, "\beta_Y"'] & H(Y)
\end{tikzcd}$$

Категория функторов

- Для любого функтора $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ существует тождественное естественное преобразование, сопоставляющее каждому X тождественный морфизм $id_{F(X)} : F(X) \to F(X)$.
- Композиция – ассоциативна, тождественное преобразование является единицей для композиции.
- Таким образом, для любой пары категорий $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ существует категория функторов, которая обозначается $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$.

Эквивалентность категорий

- Функтор $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ называются *эквивалентностью категорий*, если существует функтор $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$, такой что $G \circ F$ изоморфен $Id_{\mathbf{C}}$ в категории $\mathbf{C}^{\mathbf{C}}$, и $F \circ G$ изоморфен $Id_{\mathbf{D}}$ в категории $\mathbf{D}^{\mathbf{D}}$.
- Категории $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ называются *эквивалентными*, если существует эквивалентность $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$.
- Чтобы убедиться, что функтор является эквивалентностью, нужно проверять много условий.
- Функтор $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ является эквивалентностью, если он полный, строгий и *существенно сюръективен на объектах*.
- Последнее условие означает, что для любого объекта X в $\mathbf{D}$ существует объект Y в $\mathbf{C}$, такой что $F(Y)$ изоморфен X.

Пример

- Определим функтор $F : \mathbf{Mat} \to \mathbf{Vec}$, такой что $F(n) = \mathbb{R}^n$ и $F(A)(v) = A \cdot v$.
- Из линейной алгебры мы знаем, что между линейными операторами и матрицами есть биекция, которая описывается указаным выше способом.
- Таким образом, этот функтор полный и строгий.
- Из линейной алгебры мы знаем, что любое конечномерное векторное пространство V изоморфно пространству $\mathbb{R}^{dim(V)}$.
- Таким образом, F – существенно сюръективен на объектах, и, следовательно, является эквивалентностью.

Доказательство

Proposition

Функтор является эквивалентностью тогда и только тогда, когда он полный, строгий и существенно сюръективен на объектах.

Доказательство.

Пусть $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ – эквивалентность категорий. Пусть $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ – обратный к нему, $\alpha : G \circ F \simeq Id_{\mathbf{C}}$ и $\beta : F \circ G \simeq Id_{\mathbf{D}}$.
Тогда F – существенно сюръективен на объектах.
Действительно, для любого $X \in Ob(\mathbf{D})$ возьмём $Y = G(X)$, тогда $\beta_X : F(G(X)) \simeq X$.
Покажем, что F – строгий. Пусть $F(f) = F(f')$ для некоторых $f, f' : X \to Y$. Тогда по естественности α получается, что $f = \alpha_Y \circ G(F(f)) \circ \alpha_X^{-1} = \alpha_Y \circ G(F(f')) \circ \alpha_X^{-1} = f'$. Аналогично доказывается, что G – строгий.

Доказательство (продолжение)

Докажем, что F – полный. Пусть $h : F(X) \to F(Y)$ – некоторая стрелка. Тогда определим стрелку $f : X \to Y$ как следующую композицию:

$$X \xrightarrow{\alpha_X^{-1}} G(F(X)) \xrightarrow{G(h)} G(F(Y)) \xrightarrow{\alpha_Y} Y$$

Тогда $\alpha_Y^{-1} \circ f \circ \alpha_X = G(h)$. С другой стороны, по естественности α у нас есть равенство $\alpha_Y^{-1} \circ f \circ \alpha_X = G(F(f))$. Следовательно $G(h) = G(F(f))$. По строгости G мы получаем, что $h = F(f)$. Таким образом, f – прообраз h, то есть F – полный.

Доказательство (в обратную сторону)

Пусть F – полный, строгий и существенно сюръективен на объектах. Тогда для любого $X \in Ob(\mathbf{D})$ существует объект $Y \in Ob(\mathbf{C})$ и изоморфизм $\alpha_X : F(Y) \simeq X$. Определим $G : Ob(\mathbf{D}) \to Ob(\mathbf{C})$ как функцию, возвращающую на каждом X такой Y (не важно какой конкретно).

$$\begin{tikzcd} F(G(X)) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, dashed, "F(f')"'] & X \arrow[d, "f"] \\ F(G(Y)) \arrow[r, "\alpha_Y"'] & Y \end{tikzcd}$$

Так как F полон, то для каждого $f : X \to Y$ существует $f' : G(X) \to G(Y)$, такая что $F(f') = \alpha_Y^{-1} \circ f \circ \alpha_X$. Так как F строг, то такая стрелка уникальна. Положим $G(f) = f'$. Из уникальности f' следует, что G сохраняет id и $\circ$.

Доказательство (продолжение)

Осталось проверить, что $G \circ F \simeq Id_{\mathbf{C}}$ и $F \circ G \simeq Id_{\mathbf{D}}$.
Преобразование $\alpha_X : F(G(X)) \simeq X$ естественно, так как коммутативный квадрат на предыдущем слайде – в точности квадрат естественности α.
Так как F – полный, то для любой стрелки $\alpha_{F(Y)} : F(G(F(Y))) \to F(Y)$ существует прообраз $\beta_Y : G(F(Y)) \to Y$. Все β_Y – изоморфизмы, так как обратные к ним – это прообразы $\alpha^{-1}_{F(Y)} : F(Y) \to F(G(F(Y)))$.

Доказательство (окончание)

Осталось проверить, что β естественен.

$$\begin{tikzcd}
G(F(X)) \arrow[r, "\beta_X"] \arrow[d, "G(F(f))"'] & X \arrow[d, "f"] \\
G(F(Y)) \arrow[r, "\beta_Y"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Применив F к диаграмме выше, она начинает коммутировать, так как α естественен. Но так как F – строгий, исходная диаграмма также коммутирует.