Список вопросов по математическому анализу
АУ, весна 2015 года

Глава V. Интегральное исчисление

1. Определение и простейшие свойства площади и (псевдо)площади.

2. Пример площади, определенной на всех подмножествах плоскости.

3. Положительная и отрицательная части функции и их свойства. Подграфик функции.

4. ! Определенный интеграл. Определение и простейшие совйства.

5. Аддитивность интеграла и монотонность интеграла.

6. ! Следствия монотонности интеграла. Среднее значение функции.

7. ! Интеграл с переменным верхним пределом. Теорема Барроу. Следствия.

8. ! Формула Ньютона–Лейбница.

9. ! Линейность интеграла и формула интегрирования по частям.

10. ! Замена переменной в определенном интеграле. Примеры.

11. Вычисление интеграла $\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$.

12. Формула Валлиса.

13. ! Формула Тейлора с остатком в интегральной форме.

14. Иррациональность числа π.

15. ! Дробление, ранг, оснащение, сумма Римана.

16. Модуль непрерывности. Свойства.

17. ! Интеграл как предел интегральных сумм. Пример.

18. Формула трапеций.

19. Формула Эйлера–Маклорена (для второй производной).

20. Оценка сумм вида $\sum_{k=1}^n k^p$ при различных p. Постоянная Эйлера.

21. Формула Стирлинга.

22. Путь, носитель пути, простой путь, гладкий путь. Эквивалентные пути. Определение кривой.

23. ! Длина пути. Определение и простейшие свойства.

24. Аддитивность длины кривой.

25. ! Длина кривой, заданной параметрически.

26. Длина графика функции и длина кривой, заданной в полярных координатах. Длина эллипса. Оценка длины кривой.

27. Натуральная параметризация кривой.

28. Квадрируемые множества. Площадь криволинейной трапеции.

29. ! Площадь фигуры, ограниченной параметрически заданной простой кривой (связь между формулами, площадь криволинейной трапеции).

30. Площадь фигуры, ограниченной параметрически заданной простой кривой (общий случай). Площадь в полярных координатах.

Изложение существенной части вопросов из этой главы было близко к тексту:
`http://www.math.spbu.ru/analysis/tutorial/pan_integral.pdf`

Глава VI. Функции нескольких переменных

31. ! Линейные операторы. Свойства. Операции с линейными операторами. Матричное задание линейных операторов из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$.

32. ! Норма линейного оператора. Простейшие свойства.

33. Эквивалентные определения нормы оператора.

34. Свойства, эквивалентные ограниченности линейного оператора.

35. Ограниченность линейных операторов из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$. Оценка нормы через сумму квадратов.

36. Эквивалентные нормы. Эквивалентность всех норм в $\mathbb{R}^n$.

37. ! Дифференцируемость отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$. Частные случаи. Градиент.

38. ! Дифференцируемость координатных функций. Примеры дифференцируемых отображений.

39. ! Линейность диференциала. Дифференциал композиции.

40. ! Дифференцируемость произведения функций.

41. Теорема Лагранжа для векторнозначных функций.

42. ! Производная по направлению. Экстремальное свойство градиента.

43. ! Частные производные. Элементы матрицы Якоби. Координатная запись формул для производных.

44. ! Связь частных производных и дифференцируемости.

45. Непрерывная дифференцируемость. Определение и равносильное ей свойство.

46. ! Частные производные высших порядков. Теорема о перестановке частных производных в $\mathbb{R}^2$.

47. Теорема о равенстве частных производных для непрерывно дифференцируемых функций. Пример, показывающий необходимость непрерывности производных.

48. Мультииндексы. Определения, обозначения, лемма о производной композиции гладкой и линейной функций.

49. ! Многомерная формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа. Частные случаи.

50. Многомерная формула Тейлора с остатком в форме Пеано. Полиномиальная формула.

51. ! Локальные экстремумы. Определение и необходимое условие экстремума. Стационарные точки.

52. Квадратичная форма. Положительная и отрицательная определенность. Оценка снизу положительно определенной квадратичной формы. Достаточные условия экстремума.

53. Обратные отображения. Оценка на норму обратного отображения. Теорема об обратимости отображений, близких к обратимым.

54. Теорема об обратной функции. Выбор окрестности. Шаги 1–2 (инъективность и открытость образа).

55. Теорема об обратной функции. Выбор окрестности. Шаги 3–4 (дифференцируемость и непрерывная дифференцируемость обратной функции). Следствие об открытости отображения.

56. Теорема о неявной функции.

57. ! Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.

58. Наибольшее и наименьшее значения квадратичной формы на сфере. Формула для нормы матриц.

Изложение теорем об обратной и неявной функции и некоторых других частей этой главы близко к книге: У. Рудин *Основы математического анализа*

Глава VII. Кратные интегралы

59. Ячейки и клеточные множества. Аддитивность меры на ячейках.

60. Замкнутость клеточных множеств относительно объединения, пересечения и разности. Мера клеточных множеств. Корректность определения.

61. Свойства меры клеточных множеств.

62. ! Внешняя и внутренняя меры. Свойства. Определение меры Жордана.

63. Примеры измеримых и неизмеримых по Жордану множеств.

64. ! Критерий измеримости (с клеточными множествами).

65. Окрестность множества. Предел внешней меры окрестности множества. Следствие о множествах нулевой меры.

66. Две леммы к критерию измеримости.

67. ! Критерий измеримости (с границей множества).

68. Операции, сохраняющие измеримость множества.

69. Свойства меры Жордана.

70. Мера графика функции. Измеримость криволинейной трапеции. Мера цилиндра над множеством нулевой меры.

71. ! Разбиения множества. Мелкость разбиения. Измельчение разбиений. Оснащение.

72. ! Сумма Римана. Определение интеграла Римана.

73. Теорема об ограниченности интегрируемых по Риману функций.

74. ! Колебание функции. Критерий интегрируемости.

75. ! Верхняя и нижняя суммы Дарбу. Критерий интегрируемости в терминах сумм Дарбу. Оценка интеграла через суммы Дарбу. Интегриремость непрерывной функции.

76. Свойства кратных интегралов: связь меры и интергала, интегалы по подмножесту, аддитивность интеграла по множесту.

77. Свойства кратных интегралов, связанные с множествами нулевой меры, линейность интеграла.

78. Свойства кратных интегралов: интегрируемость произведения, отношения и модуля.

79. Свойства кратных интегралов: интегрирование неравенств.

80. Свойства кратных интегралов: счетная аддитивность интеграла по множеству.

81. ! Интегральная тероема о среднем.

82. ! Геометрический смысл интеграла.

83. Элементарные множества. Свойства.

84. Мера спрямляемой кривой.

Изложение материала этой главы близко к лекциям по математическому анализу О. В. Бесова и Г. Е. Иванова в МФТИ

Примечания

Особо важные вопросы помечены восклицательным знаком.

Студенты, успешно сдавшие коллоквиум, отвечают с доказательством один вопрос из второй части (42–84). Сдача коллоквиума не освобождает от необходимости знать формулировки из обеих частей курса.

Незнание хотя бы одной из следующих определений и формулировок влечет оценку “неудовлетворительно”: определения одномерного интеграла; теоремы о среднем; теоремы Барроу; формулы Ньютона–Лейбница; формул замены переменной и интегрирования по частям; определения сумм Римана и их связи с интегралами; определения длины пути и формул для вычисления длины; формул для вычисления площади; определения нормы линейного оператора, дифференцируемости отображения, градиента, матрицы Якоби, производных по направлению, частных производных; экстремального свойства градиента; связи между дифференцируемостью и существованием частных производных; многомерной формулы Тейлора; теорем об обратной и неявной функции; определение точек экстремума и условного экстремума, а также методов их отыскания; определения внешней и внутренней меры, а также меры Жордана; критериев измеримости по Жордану; определения многомерной суммы Римана; определения многомерного интеграла; критерия интегрируемости; геометрического смысла интегрла.