

Темы:

- пределы последовательностей,
- $N(\varepsilon)$,
- сходимость монотонных и ограниченных последовательностей,
- теорема Штольца,
- критерий Коши,
- частичные пределы (верхний и нижний предел).

1. Докажите, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k} = A$$

если а) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = A$.

2. Докажите, что для любой положительной последовательности $\{a_n\}$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_1 + a_{n+1}}{a_n} \right)^n \geq e, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_1 + a_{n+p}}{a_n} \right)^n \geq e^p.$$

3. Найдите все c для которых сходится последовательность a_n , заданная рекуррентным соотношением

$$a_1 = \frac{c}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(c + a_n^2).$$

В случае сходимости найдите предел.

4. Найдите предел $\sqrt[3]{n^3 + 10n^2} - \sqrt[5]{n^5 - n^4}$.

5. Для последовательности $x_n > 0$ верно соотношение:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_n} = 1.$$

Следует ли отсюда, что последовательность x_n сходится? Если да, докажите. Если нет, приведи контр-пример.

6. Сходится ли последовательность

$$x_1 = 0, \quad x_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{n \ln k}?$$

7. Найдите предел и $N(\varepsilon)$ последовательности

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^{n^2+100}.$$